

運動方程式から導かれる関係

運動方程式 $ma = F$

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

モーメントと角運動量の関係

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

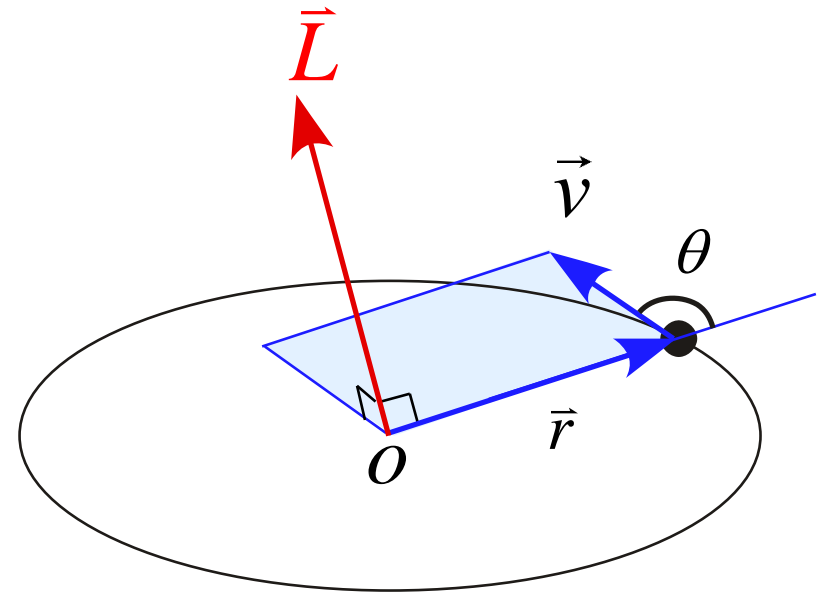
両辺に左から位置ベクトル \vec{r} を
かけると(外積)

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

↑
↑

角運動量
モーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について (何故、 \vec{r} が微分の中に入るのか?)

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$= \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad // \quad m\vec{v} \text{ より}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} = \vec{0}$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

角運動量とモーメント

角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

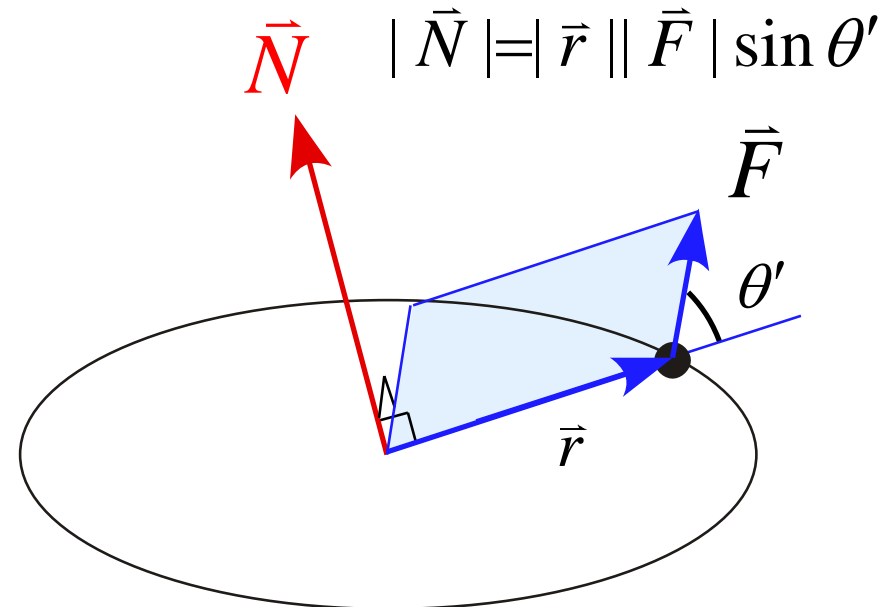
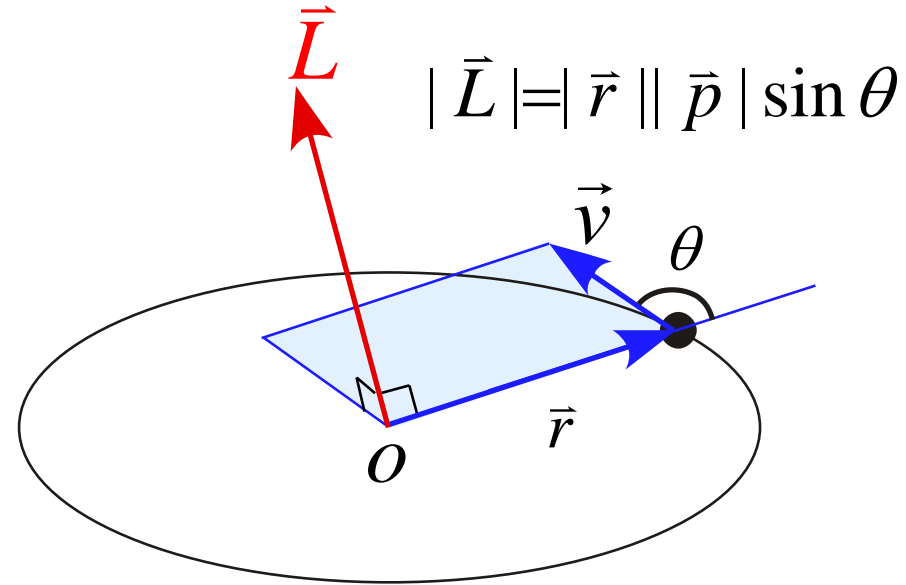
質点が点 O まわりを回転する
勢いを表している

$$[L][M] \frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

点 O まわりの力のモーメント

$$[L][M] \frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$



角運動量保存則

角運動量とモーメントの関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ある質点の点 O まわりの
角運動量の変化は
この質点に働く点 O まわりの
力のモーメントに等しい

もし、モーメント $\vec{N} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

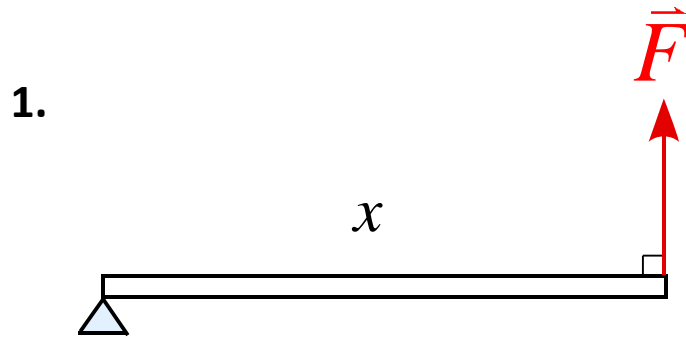
外力によるモーメントの総和 \vec{N} が
 $\vec{0}$ のときは、内力が働いていたと
しても、系の角運動量 \vec{L} は変化しない

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

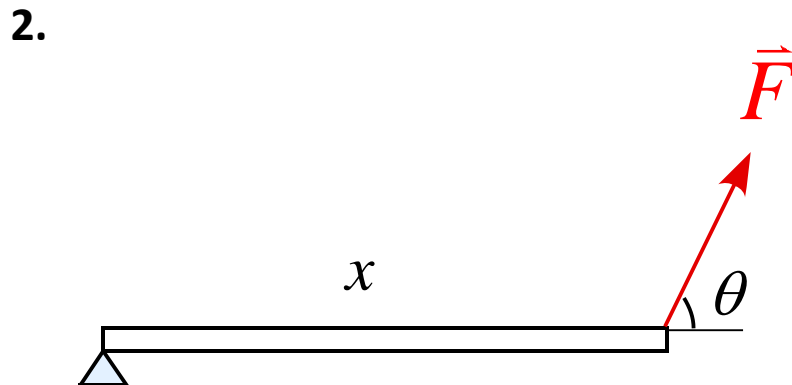
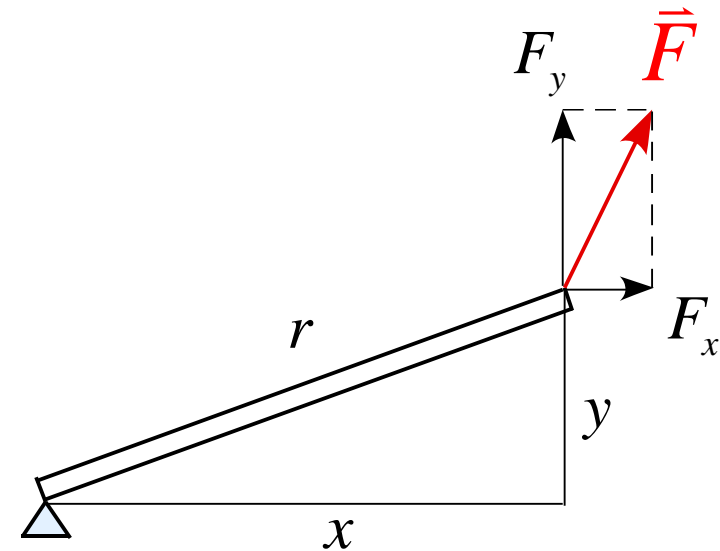
力のモーメント～例題

例題

以下の図の力のモーメント N を表せ。但し、棒の質量は無視できるとする。



3.



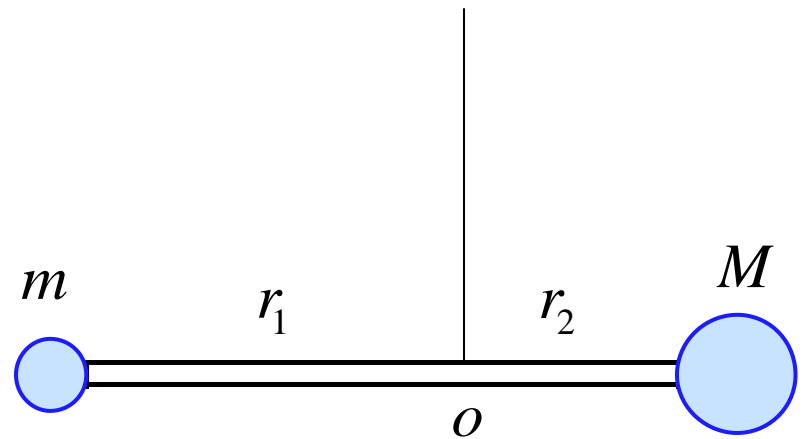
力のモーメント～例題

例題

軽い棒の両端に質量 m の物体と質量 M の物体が図のように取り付けられていて点 O で糸につるされている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。
2. 棒の運動方程式を記述せよ。
3. 棒の回転の運動方程式を記述せよ。
4. 棒が回転しない条件 $\frac{r_1}{r_2}$ を求めよ。



力のモーメント～例題

例題

図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点を取り付けられ、糸でつるさている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

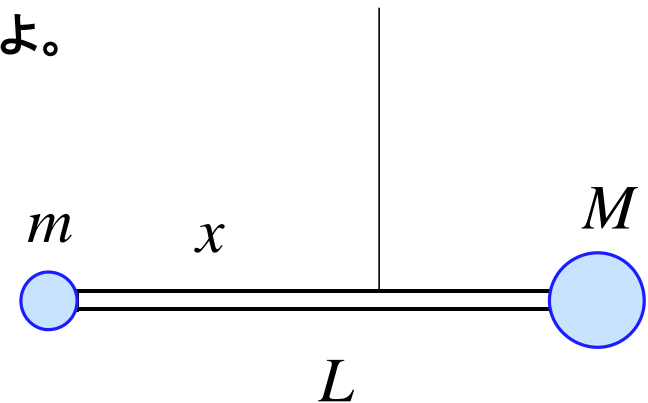
(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

2. 棒の質量が m の場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている
力 \vec{F} の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

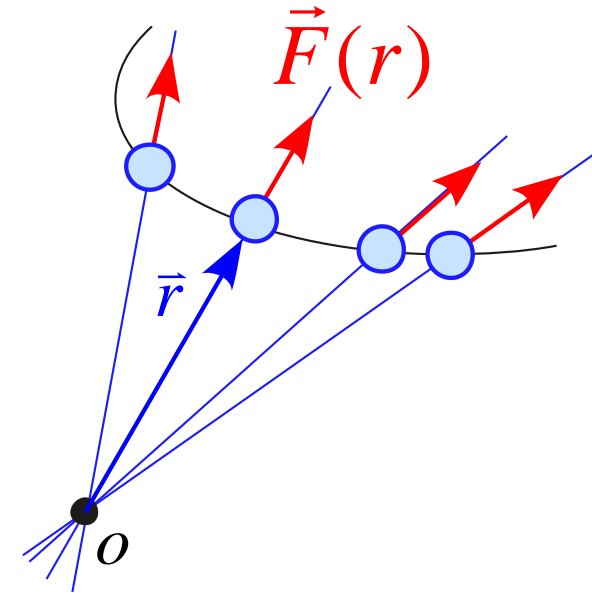
$$\vec{F}(r) = F(r) \frac{\vec{r}}{r}$$

力の大きさ

力の向き
単位ベクトル

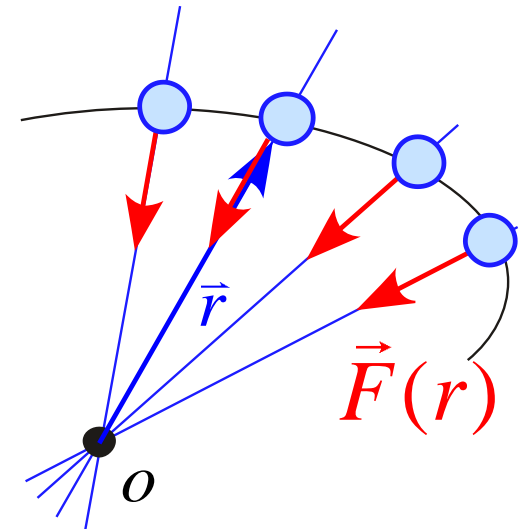
$$F(r) > 0$$

(斥力)



$$F(r) < 0$$

(引力)



中心力～角運動量保存

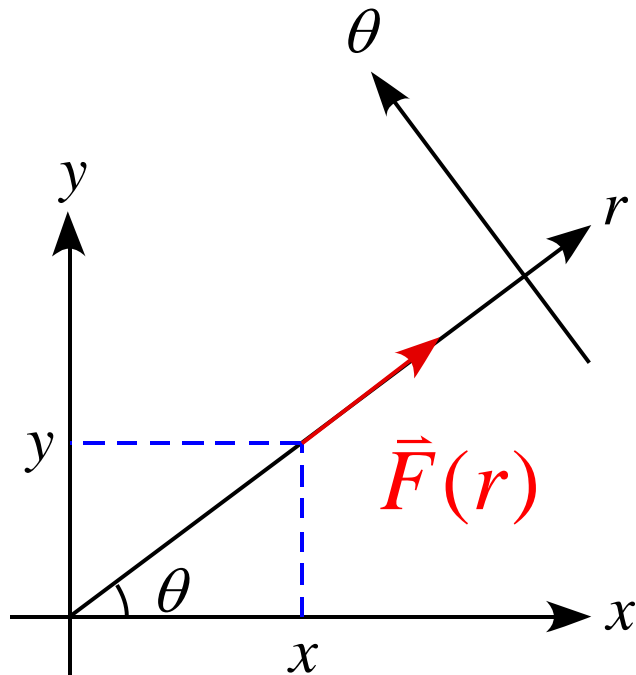
角運動量の変化を計算すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) \\
 &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= 0 + \vec{r} \times \boxed{F(r) \frac{\vec{r}}{r}} \leftarrow \text{中心力} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

従って、**中心力が働く運動では角運動量が保存する**

中心力～運動方程式

運動方程式から考えると
極座標表示を使用する



中心力は

$$r \text{ 方向 } F_r = F(r)$$

$$\theta \text{ 方向 } F_\theta = 0$$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、 a_r, a_θ は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表されるので、

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = F(r)$$

動径方向の運動方程式

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、 θ 方向の式が何を示しているか
検討してみよう

変位は

$$x(t) = r \cos \theta$$

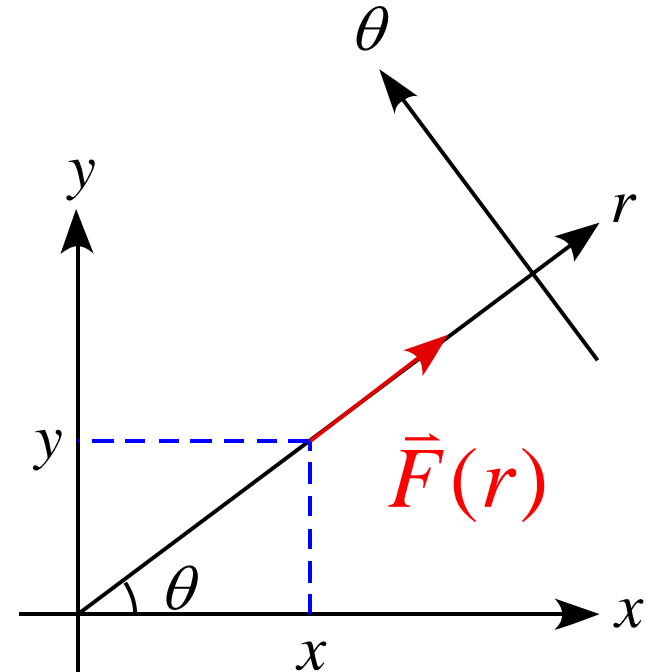
$$y(t) = r \sin \theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

中心力～運動方程式

ここで、角運動量 \vec{L} は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

中心力～運動方程式

従って、z成分だけ考えればよく

$$\begin{aligned}
 L &= xp_y - yp_x \\
 &= xmv_y - ymv_x \\
 &= r \cos \theta \cdot m \left[\frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right] - r \sin \theta \cdot m \left[\frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right] \\
 &= rm \frac{dr}{dt} \cos \theta \sin \theta + r^2 m \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} - rm \frac{dr}{dt} \sin \theta \cos \theta + r^2 m \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \\
 &= r^2 m \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 m \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} \\
 &= r^2 m \frac{d\theta}{dt} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\
 &= r^2 m \frac{d\theta}{dt}
 \end{aligned}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、 θ 方向の式において

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

となる

即ち、

$$ma_{\theta} = 0$$

は角運動量保存則を表している

角運動量～例題

例題

質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動をしている。

$t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p} = (p_x, p_y)$ を求めよ。
2. この運動における質点の角運動量 \vec{L} を求めよ。

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

ある時刻 t での位置は
 $t = 0$ で $(x, y) = (r_0, 0)$ とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

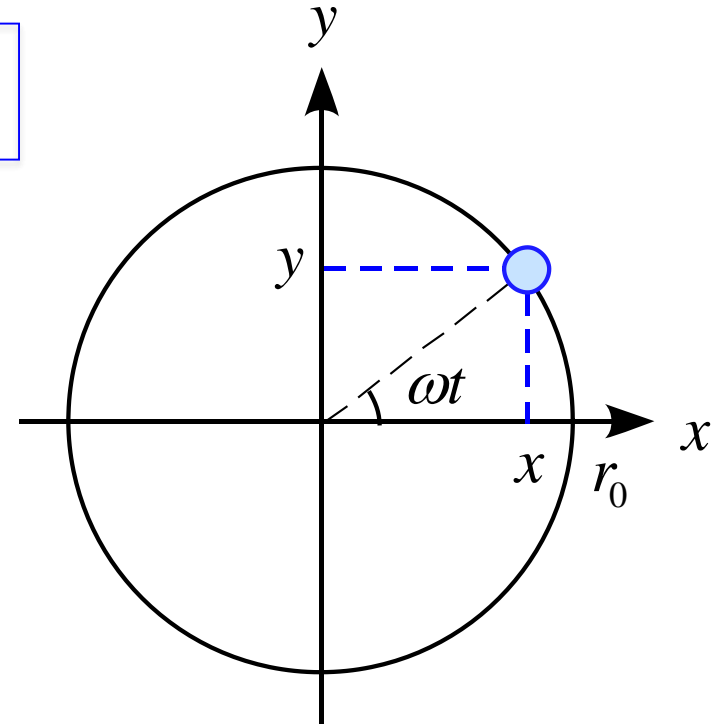
と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt} [r_0 \cos \omega t] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt} [r_0 \sin \omega t] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

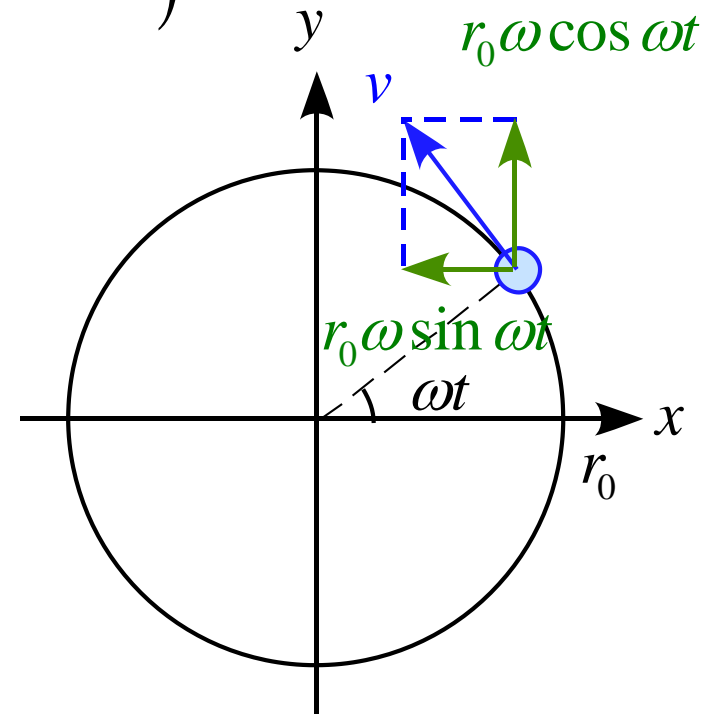


円運動～等速円運動

従って、

$$\begin{aligned}
 v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r_0 \omega \sin \omega t)^2 + (r_0 \omega \cos \omega t)^2} \\
 &= \sqrt{r_0^2 \omega^2 \sin^2 \omega t + r_0^2 \omega^2 \cos^2 \omega t} \\
 &= \sqrt{r_0^2 \omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\
 &= \sqrt{r_0^2 \omega^2} \\
 &= r_0 \omega
 \end{aligned}$$

となる。



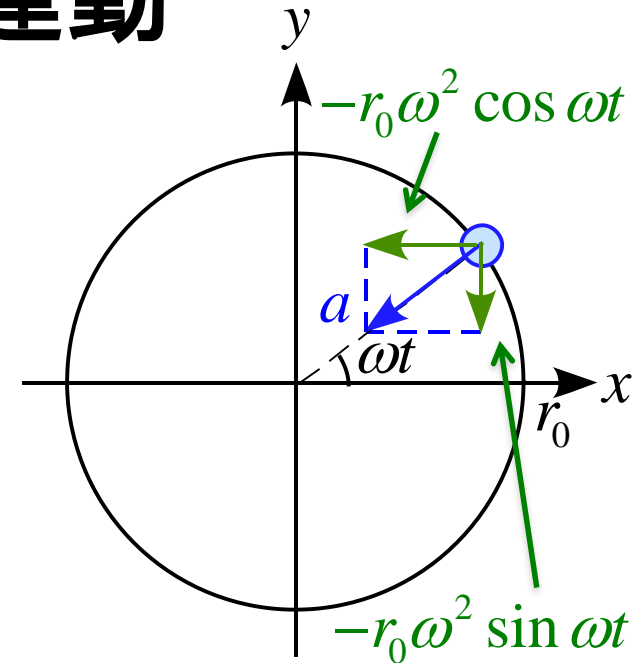
円運動～等速円運動

加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}[-r_0 \omega \sin \omega t] = -r_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}[r_0 \omega \cos \omega t] = -r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

と表される。



$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r_0 \omega^2 \cos \omega t)^2 + (-r_0 \omega^2 \sin \omega t)^2}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4} = r_0 \omega^2$$

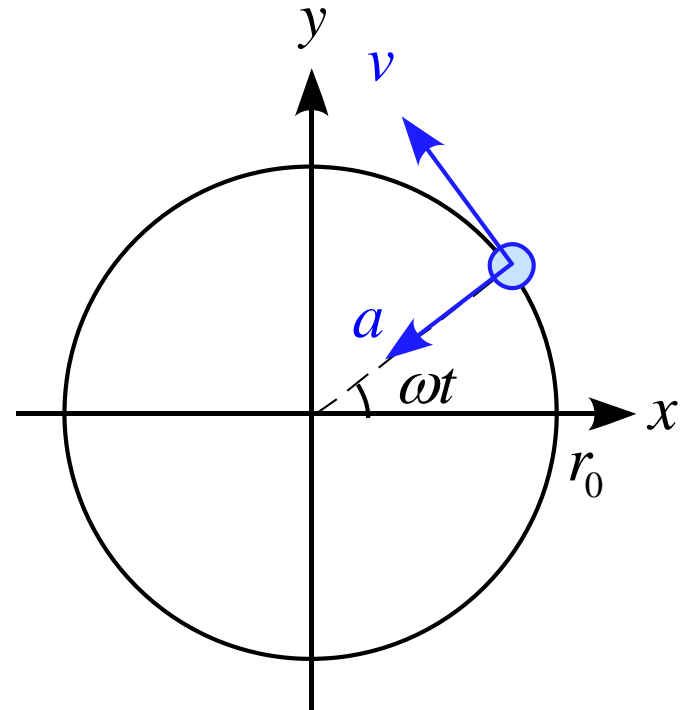
となる。

円運動～等速円運動

等速円運動 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定)

$$v = r_0 \omega$$

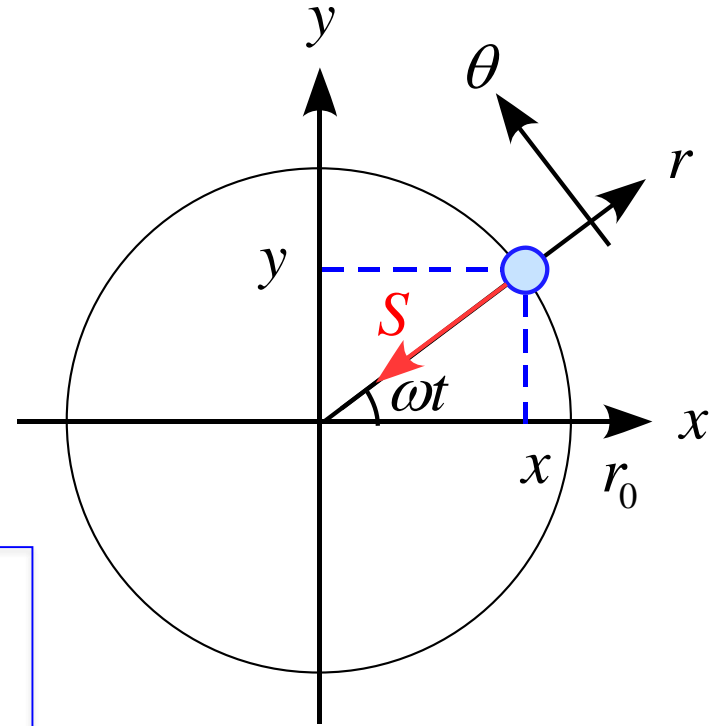
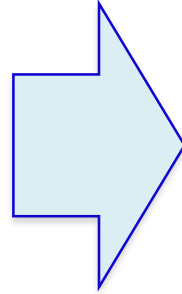
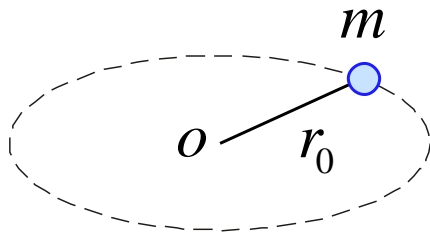
$$a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動～運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$



a_r, a_θ
に代入

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -S$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = S$$

$$mr_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

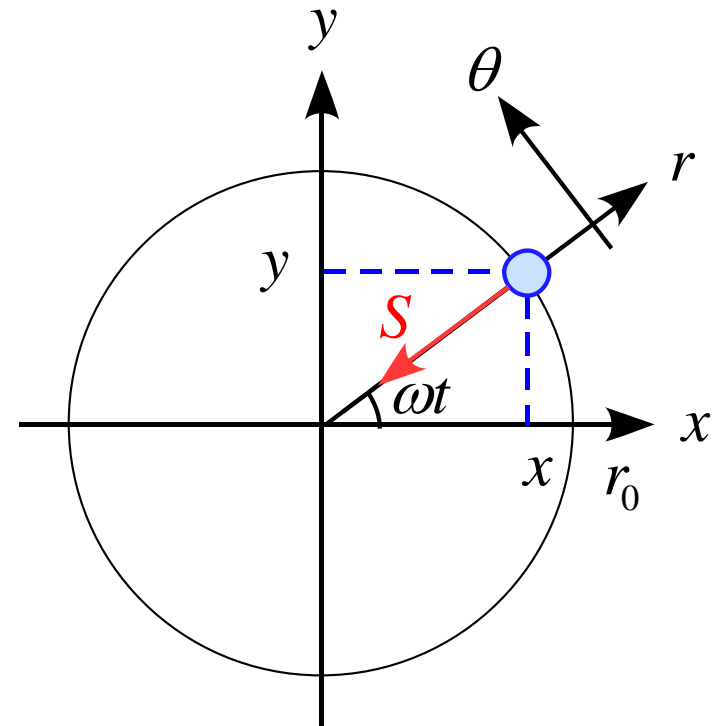
角速度 $\frac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

$$mr_0 \omega^2 = S$$

$$ma = S$$

中心方向に加速度があると考えられる



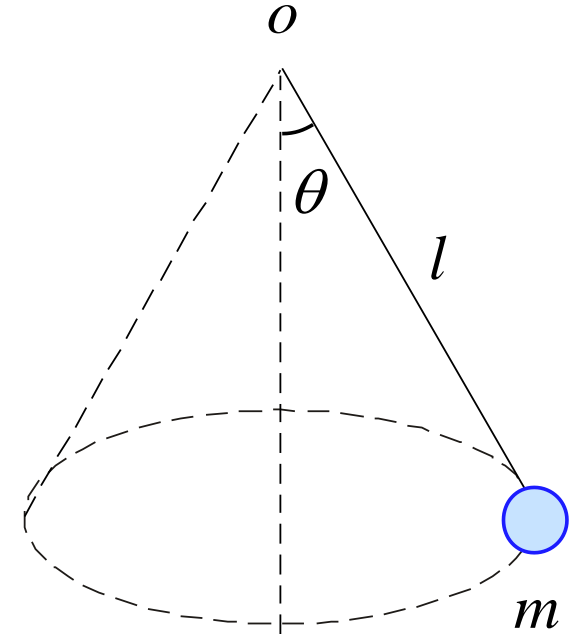
円運動～例題

例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問いに答えよ。



1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。
2. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表すことができる。

糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題

例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。

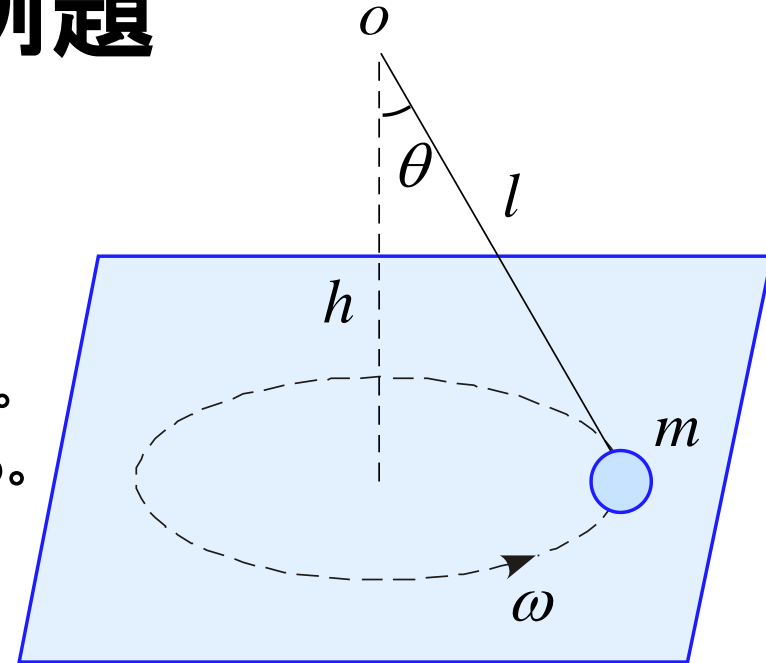
糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。

糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。

水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。

以下の問いに答えよ。



1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。
2. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
3. 糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。
4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。 ω_0 を求めよ。

円運動～例題

例題

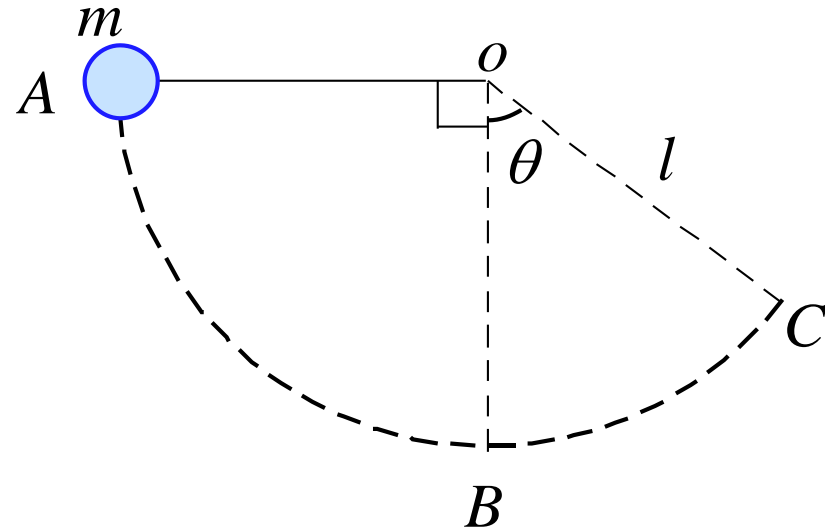
図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

以下の問いに答えよ。



1. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
2. 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。
3. 点 C での糸の張力 T_C を求めよ。

円運動～例題

例題

図のような円運動のモデルを考える。

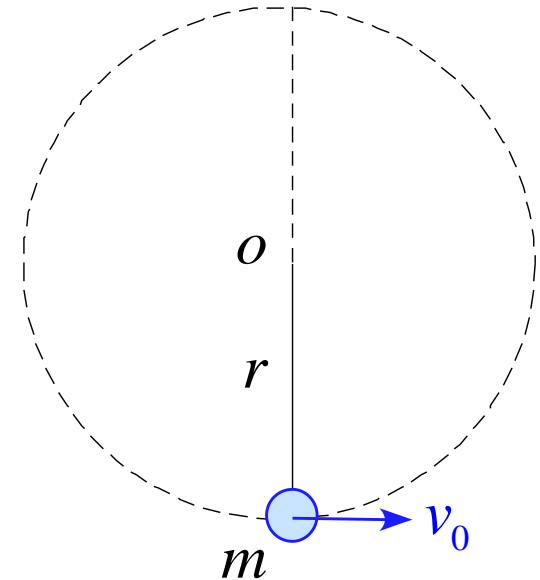
糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

以下の問いに答えよ。



1. r 方向、 θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。

運動方程式から導かれる関係

$$\text{運動方程式 } ma = F$$

x で積分

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

左側から \vec{r} で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量

モーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

t で積分

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- ・問題文で指定されている場合はそれを利用する
- ・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- ・一般的には運動の進行方向を正にとると良いことが多い
- ・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は

1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力

の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
 $ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

解ける

運動方程式を立てる



$$m \frac{dv}{dt} = F \quad \Rightarrow \quad v = \text{○} \quad \Rightarrow \quad x = \text{○}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

t で積分

t で積分

解くことが困難

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

どの物理量の関係が必要か検討する

t で積分

x で積分

左側から \vec{r} で外積

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- ・加速度 / 速度 / 変位
- ・万有引力の法則
- ・ニュートンの運動の法則
- ・仕事とエネルギー
- ・エネルギー保存則
- ・運動量と力積
- ・運動量保存則
- ・力のモーメント
- ・角運動量
- ・角運動量保存則
- ・円運動

取り扱っていない内容

- ・単振動 / 単振り子
- ・ケプラーの法則
- ・剛体の運動
- ・慣性モーメント