電流～電荷の移動

電荷が停止している → 静電現象

移動する電荷 ＝ 電気が流れる
荷電粒子の流れ → 電流

電荷の流れが一定　：定常電流

電流の定義
任意の導線断面を単位時間に通過する電気量

任意の断面を Δt [s] 間の間に、ΔQ [C] の電荷が通過したとき、　　スカラー量

その電流の大きさ I [A] は

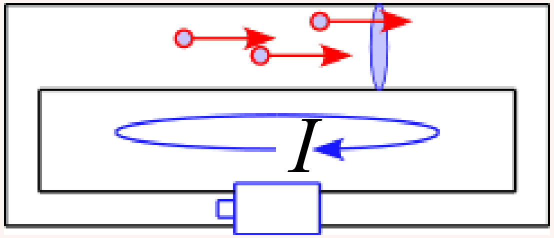
$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

$$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}} = [\ \mathrm{A}\ ]$$

$\Delta t \to 0$ の極限において

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

と定義される

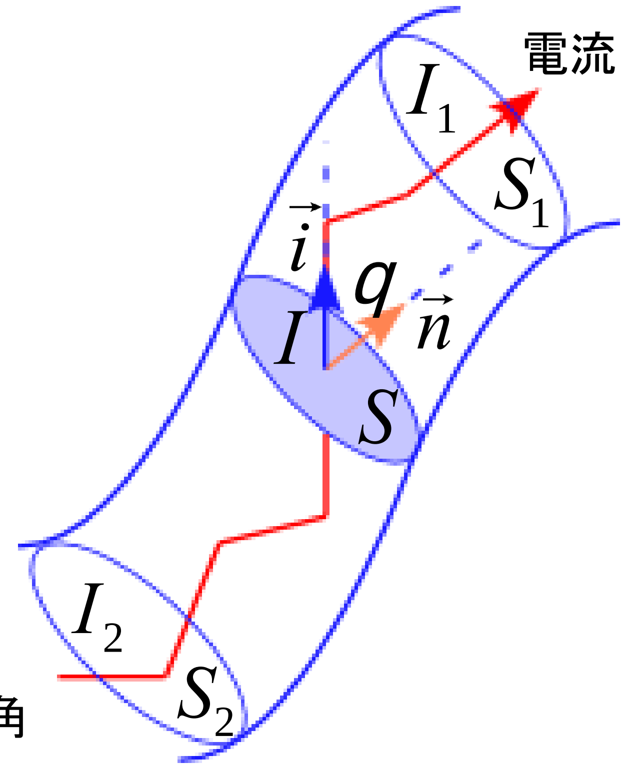


電流～電流密度

導線内を通過する電流について

電束密度: $\vec{i}$

単位面積あたりの電流



断面 Sを通過する電流の大きさは

$$I = iS\cos\theta = i_n S = \vec{i}\cdot\vec{S}$$

$$\to \int_S i_n\, dS$$

q: 断面 Sの単位法線ベクトル nと電流密度とのなす角

導線の断面 S_1, S_2を通過する電流の大きさを I_1, I_2

とすると、電荷保存則により出入りの電流は等しく $I_1 = I_2$ である

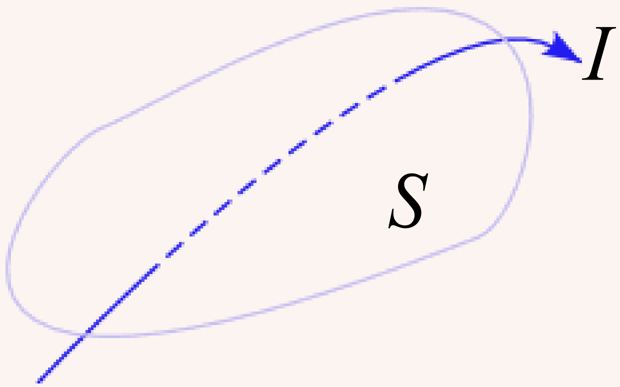
従って

$$\int_{S_1} i_{n1} dS + \int_{S_2} i_{n2} dS = 0 = 0$$

電流〜電流の保存側

任意の閉曲面S上で電流を面積分すると

$$\int_S i_n dS = 0$$



である

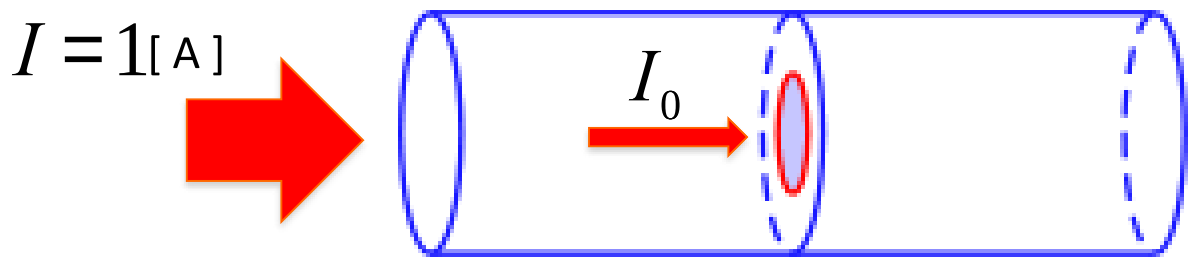
電流の保存則

導線を流れる電流～例題

半径 1 [mm] の断面をもつ導線がある。
この導線に 1 [A] の電流が流れている。
以下の問に答えよ。
但し、電流密度は一様として考えてよいものとする。

(1) 電流密度の大きさ i を求めよ。

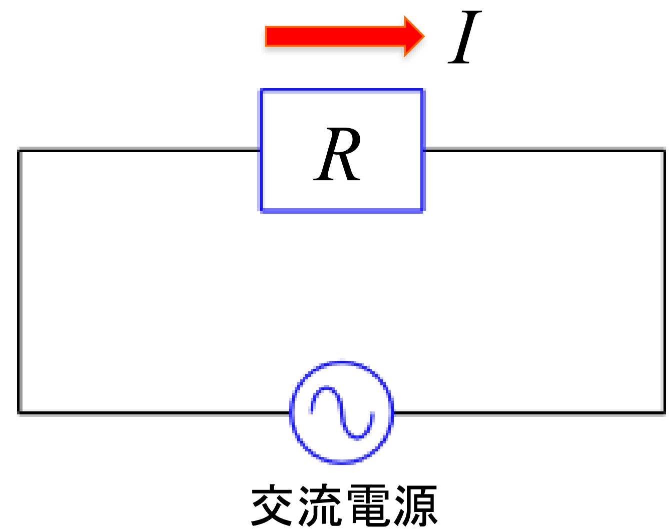
(2) 導線の半径 0.5 [mm] の内側で流れる電流の大きさ I_0 を求めよ。



直流と交流

電流が時間的に変動しない：直流

電流が時間的に周期的に変動する：交流



日本の家庭用コンセント

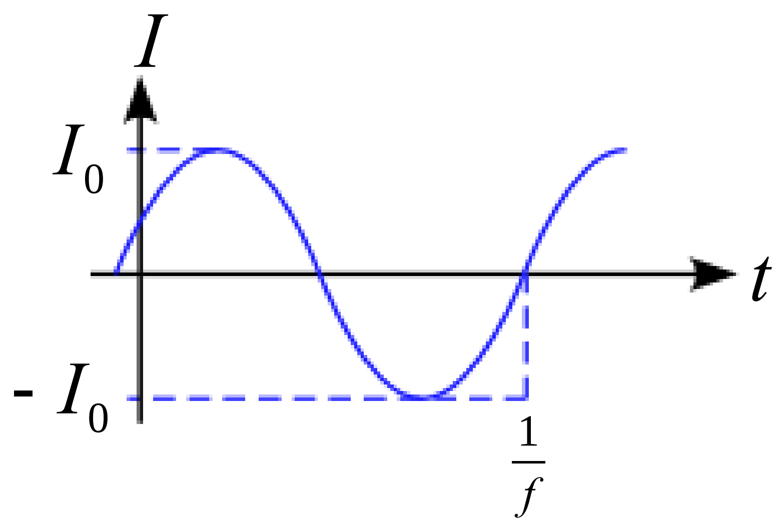
振動数 f は

$$f = 50 \text{ or } 60 \quad [\,\mathrm{Hz}\,]$$

であり、電流は

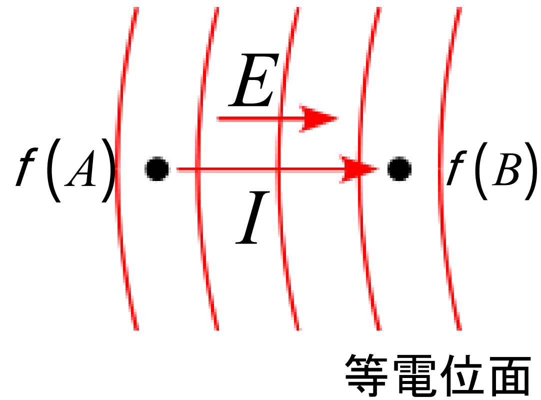
$$\boxed{I(t) = I_0 \sin(2\pi f t)}$$

で変動している



電流～オームの法則

電流が流れる為には ➡ 電位差が必要



電位差 $V = f(A) - f(B)$ と

電流の大きさ I は比例関係

比例定数を R とすると

$$V = RI$$

オームの法則
(Ohm)

比例定数 R について

電位差 V が一定のとき

$R \to$ 大きく ➡ $I \to$ 小さく

$R \to$ 小さく ➡ $I \to$ 大きく

➡ 電流の流れにくさの度合い

「抵抗」

電位差 $1V$ の電極間を $1A$ の電流が流れるときの電気抵抗を1Wとする

電流～抵抗

一様な物質で作られた抵抗線

「抵抗」は「電流の流れにくさの度合い」

抵抗線の長さ l に比例 ← 抵抗線が長ければ長いほど、電流は流れにくい

導線の断面積 S に反比例 ← 断面積が広ければ広いほど、電流は流れやすい

比例定数 r として

$$R = r\frac{l}{S} = \frac{1}{s}\frac{l}{S}$$

r :電気抵抗率

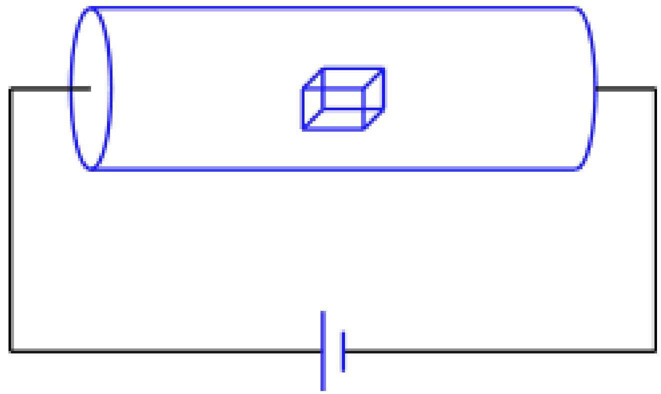
$s = 1/r$:電気伝導率

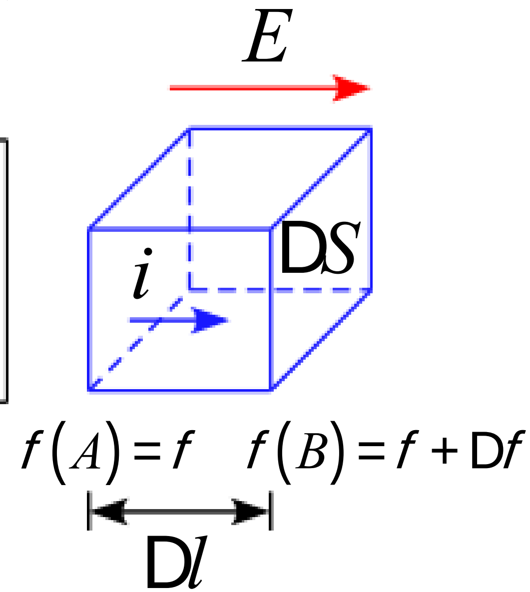
r, s :抵抗線の物質に依存

$$r = R\frac{S}{l}$$

$$\mathrm{W}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{m}} = [\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}\,]$$

抵抗～オームの法則





図のように導線中の

微小部分を考える

長さ Δl 、断面積 ΔS

電位差 $\Delta\phi$ とする

微小導体に電束密度 i の電流が流れているとき

この微小導体の電気抵抗は

$$R=\frac{V}{I}=\frac{\Delta\phi}{i\Delta S}=\frac{1}{\sigma}\frac{\Delta l}{\Delta S}$$

微小部分での電場の大きさは $E=\Delta\phi/\Delta l$ なので

$$i=\frac{1}{\Delta S}\left(\Delta\phi\cdot\sigma\frac{\Delta S}{\Delta l}\right)=\sigma E$$

従って

$$\vec{i}=\sigma\vec{E}$$

一般化されたオームの法則

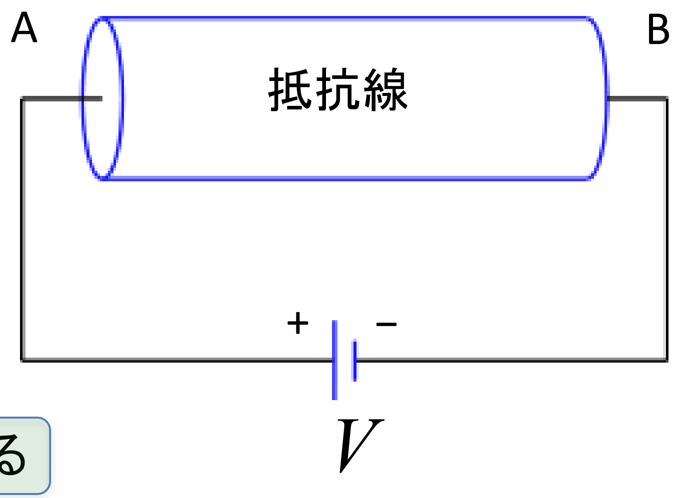
オームの法則～電子論

オームの法則の理論的な議論

図のような抵抗線ABを考える

任意の断面 S を単位時間に通過する

電気量を求める



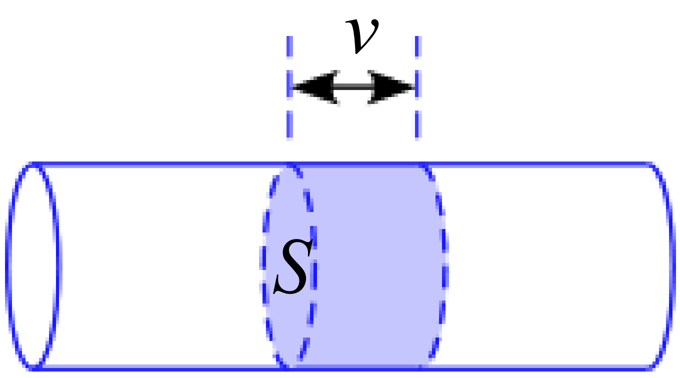
電子は負の電荷 → Bから Aに向かって流れる

この電子の平均の速さを v とすると

単位時間に進む距離は v なので

単位時間に通過できる電子は

右図の色付きの部分にある電子となる



抵抗線の電子密度を n とおくと

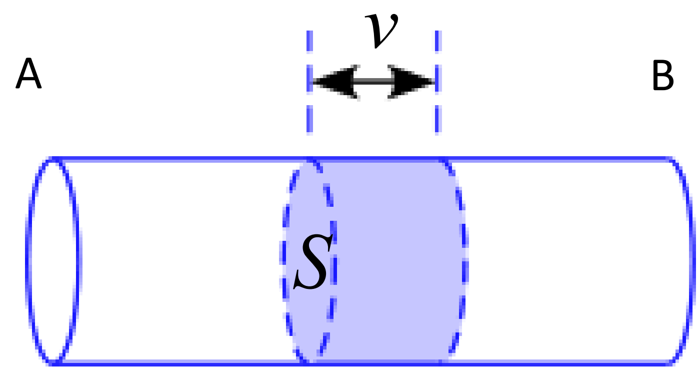
単位時間に S を通過する電子の個数 N は

$$N = nvS$$

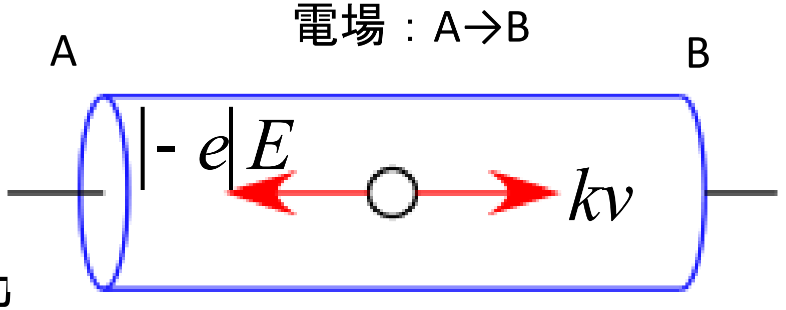
オームの法則～電子論

1個当たりの電気量を - e とすると
単位時間にSを通過する電気量の大きさ
即ち、電流 i の大きさは

$$i = \left|-e\right| \cdot N$$
$$= \boxed{envS}$$



電子の運動をモデル化すると



電場からの力：B→A

原子や正イオンからの妨害：速度比例の抵抗力

この2つがつり合って、一定の速さで運動するとする

$$\left|-e\right| \cdot E = kv$$

$$eE = kv$$

が成立する

オームの法則～電子論

ここで、抵抗線の長さを l とすると

電位差 V なので、電場 E の大きさは

$$E = \frac{V}{l}$$

と表されるので、

$$e \cdot \frac{V}{l} = kv$$

よって電子の速さ v は

$$v = \frac{eV}{kl}$$

となる

電流の式に代入すると

$$i = envS$$

$$= en\frac{eV}{kl}S$$

$$= \frac{e^2nS}{kl}V$$

式変形をして

$$V = \frac{k}{e^2n}\frac{l}{S} \cdot i$$

従って、抵抗 R は

$$R = \frac{k}{e^2n}\frac{l}{S}$$

となり、オームの法則が成立している

ジュールの法則

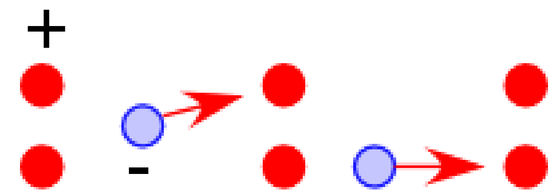
2点間 A – B の電位差が

$$V = f(A) - f(B)$$

のとき、電荷 q が点Aから点Bに移動すれば

電荷は外部に対して次のような仕事をする

$$W = q\{f(A) - f(B)\} = qV$$



電子が原子に衝突し
原子の振動を激しくさせる

振動エネルギー

ジュール熱

オームの法則を使うと、電荷に対する仕事率は

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dq}{dt}V = IV = I^2R = \frac{V^2}{R} \quad [\mathrm{W}]$$

ジュールの法則

$P = 1\,\mathrm{W}$は毎秒$1\,\mathrm{J}$の仕事をする

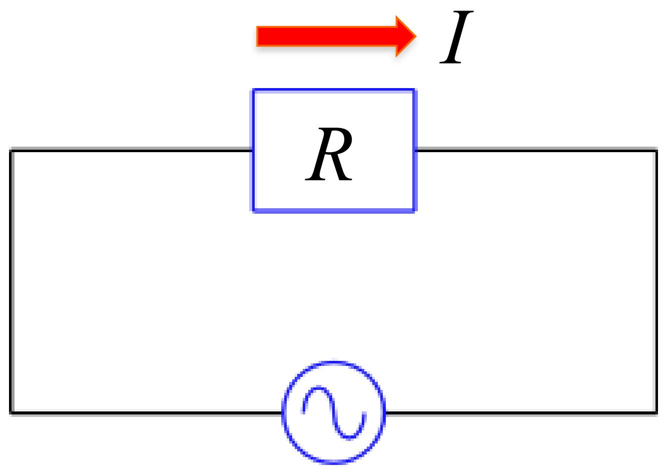
電気抵抗 R がある回路では、電荷の持つエネルギーは抵抗により失われる
失われたエネルギーは抵抗周辺の熱エネルギーとして散逸していく

直流と交流～例題

電流が時間的に周期的に変動する電流 $I(t)$が

$$I(t) = I_0 \sin(2pft)$$

で表される電流がある。



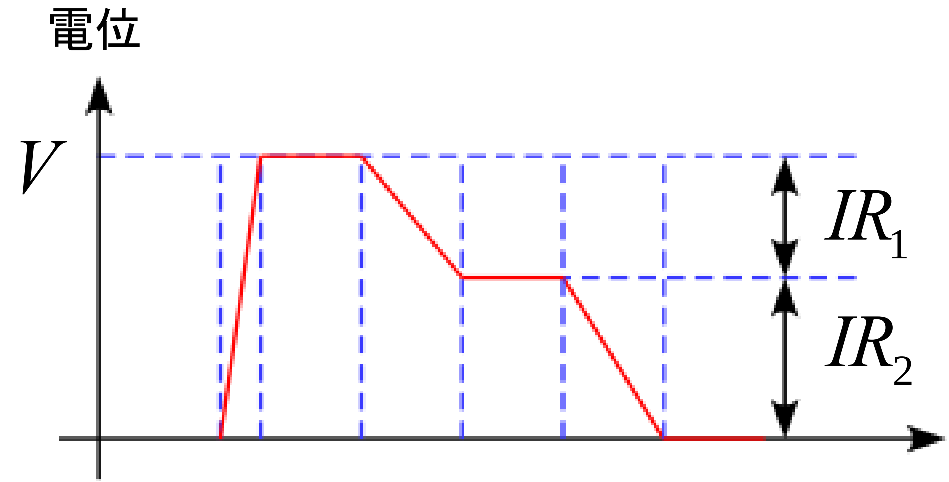
(1) 抵抗 Rに流したときの仕事率 P を求めよ。

(2) このときの平均電流の大きさを求めよ。

起電力

電源
低電位の電荷を高電位に持ち上げる仕事をする装置

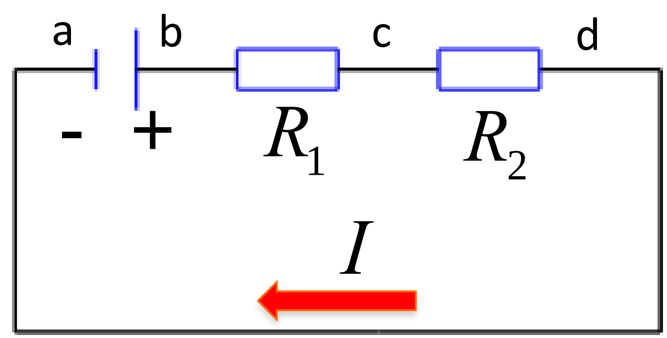
起電力



図のような回路における電位を考える

電荷は

a
↓ 起電力で仕事をされ高電位になる
b
↓ 抵抗で仕事し電位が下がる
c
↓ 抵抗で仕事し電位が下がる
d
↓
a



抵抗の両端(b-d)の電位差の和: $IR_1 + IR_2 = V$

キルヒホッフの法則

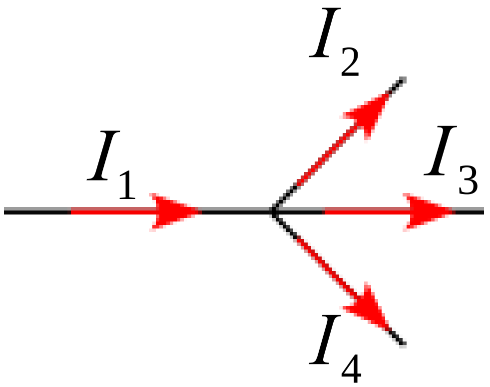
キルヒホッフの第1法則 (電流の保存則)

回路の分岐点に流れ込む電流の代数和は0である

例

分岐点に
流れこむ電流：正
流れだす電流：負

$$0 = \sum_{i=1}^{4} I_i$$



回路分岐点での電流

キルヒホッフの第2法則 (オームの法則)

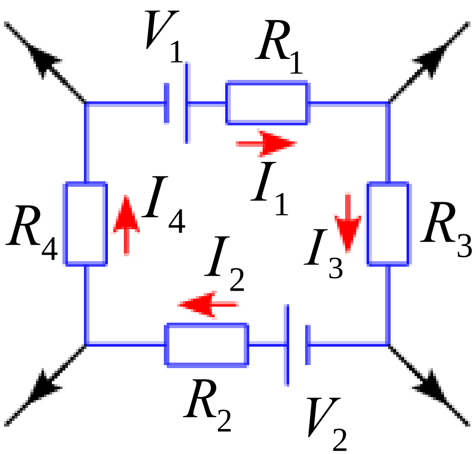
回路の一部を形成する閉回路にそって1周する経路で、
起電力の総和は抵抗による電圧降下の総和に等しい

例

閉回路で時計回りに回路の向きを取ると

$$V_1 + V_2 = I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 + I_4R_4$$

任意の閉回路



電流と電荷の連続方程式

キルヒホッフの第1法則 (電流の保存則) ← 電荷の保存則

ある領域に存在する電荷の総量が変化したならば
その変化量はその領域を囲む面から電荷が出入りした量に他ならない

閉曲面 S で囲まれた領域 V の電荷密度 ρ とする

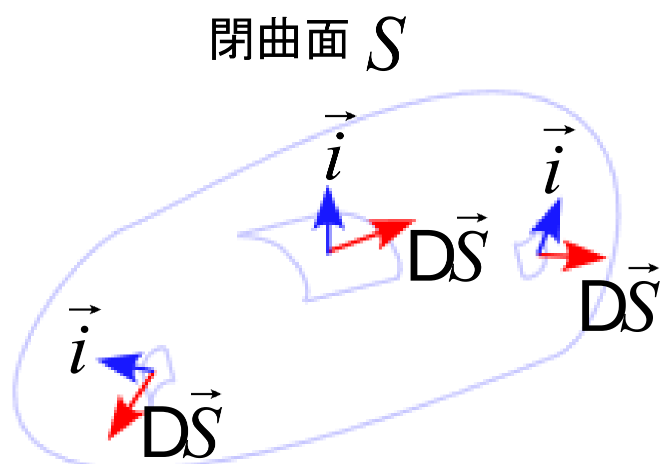
この領域に含まれる電荷量は

$$Q = \int_V \rho dV$$

である

閉曲面 S から出入りする電流密度を $\vec{i}$ とすると

微小面積 ΔS を通過する電荷は $\vec{i} \cdot \Delta\vec{S}$ である



従って、電荷量の時間変化は

$$\frac{d}{dt}Q = \frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\int_S \vec{i} \cdot d\vec{S}$$

電流と電荷の連続方程式

ガウスの定理(面積積分と体積積分の関係)により

$$\int_S \vec{i}\cdot d\vec{S} = \int_V \nabla\cdot\vec{i}\,dV$$

であるから

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV + \int_S \vec{i}\cdot d\vec{S} = 0$$

$$\int_V \frac{d}{dt} r\,dV + \int_V \nabla\cdot\vec{i}\,dV = \int_V \left(\frac{d}{dt} r + \nabla\cdot\vec{i}\right) dV = 0$$

となる

この式は任意の閉曲面で成り立つので、空間の各点で

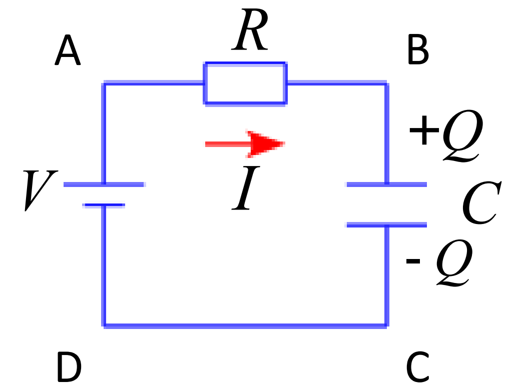
$$\frac{d}{dt} r + \nabla\cdot\vec{i} = 0$$

電流と電荷の連続方程式

が成り立つ

回路の方程式～RC回路

図の様な回路の電位を考えると



電池の起電力より: $V_{D \to A} = V$

オームの法則より: $V_{A \to B} = -RI$

コンデンサーに電気量 Qが充電されている:

$$V_{B \to C} = -\frac{Q}{C}$$

従って、キルヒホッフの法則より

$$V_{D \to A} + V_{A \to B} + V_{B \to C} = 0$$

即ち、

$$V - RI - \frac{Q}{C} = 0$$

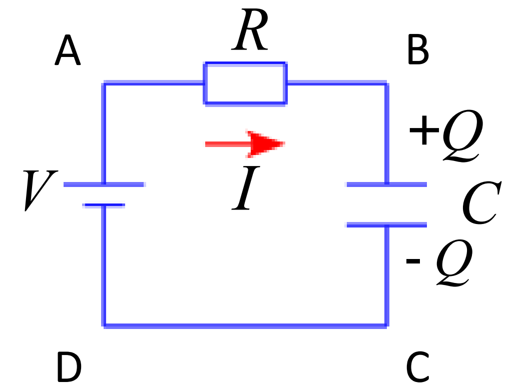
式変形して

$$\boxed{RI + \frac{Q}{C} = V}$$

回路の方程式

回路の方程式〜RC回路

ここで、コンデンサーについて着目してみる



コンデンサーでの電気量の充電は

$$Q(t) = \int_0^t I(t')dt' + Q(0)$$

となる

この両辺を t で微分すると

$$\boxed{I(t) = \frac{dQ(t)}{dt}} \quad \text{電気量保存の式}$$

コンデンサーに流れ込んだ電気量がそのまま蓄えられる

これを回路方程式に代入すると

$$\boxed{R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = V}$$

Q に関する微分方程式

となる

回路の方程式～RC回路

微分方程式の一般解は

$$Q(t) = CV - Ae^{-\frac{t}{RC}} \qquad (A \text{は定数})$$

と表せる

初期条件を$t=0$でコンデンサーは充電されていなかったとすると

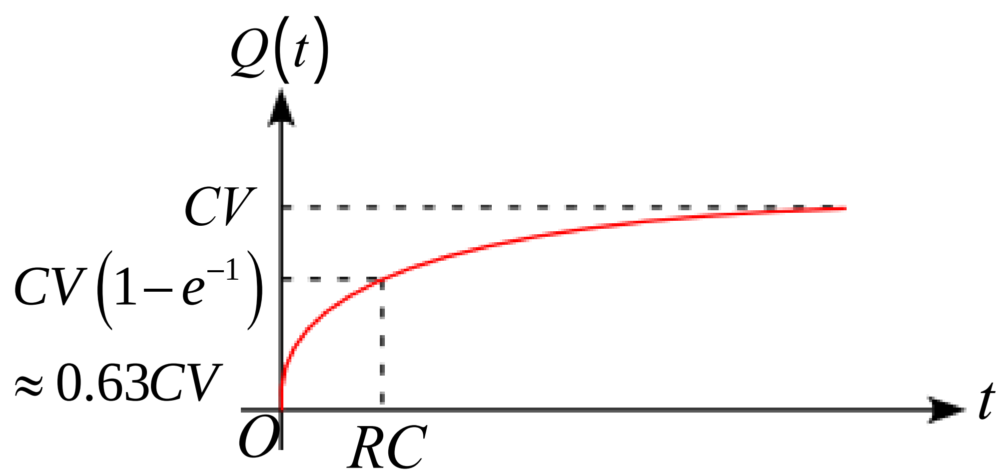
$$Q(0) = CV - Ae^{-\frac{0}{RC}} = CV - Ae^{0} = 0$$

よって、$A = CV$であるから

$$Q(t) = CV\left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$$

RC:回路の時定数

となる



回路の方程式～エネルギー保存則

回路の方程式　$RI + \frac{Q}{C} = V$　の両辺に電流 $I = \frac{dQ}{dt}$ をかけると

$$RI^2 + \frac{Q}{C}\frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dt}V$$

$$\boxed{RI^2} + \frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}}\right) = \boxed{\frac{dQ}{dt}V}$$

抵抗で単位時間に
消費されるジュール熱

コンデンサーの
エネルギー

単位時間に
電池がする仕事
「仕事率」

コンデンサーの静電エネルギー

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

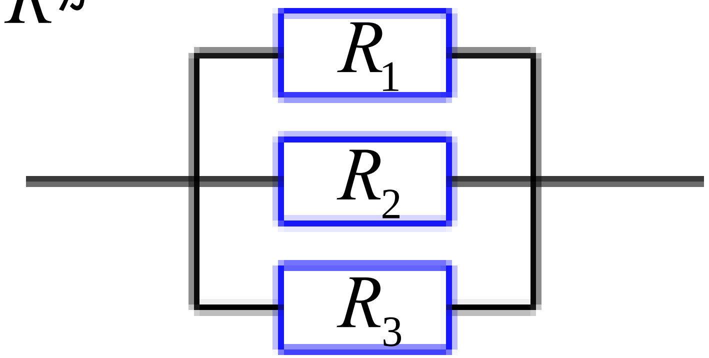
合成抵抗～例題

抵抗 R_1, R_2, R_3 がある。

(1) 3つの抵抗が並列につながれたときの合成抵抗 R が

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

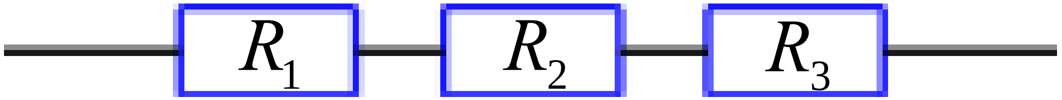
であることを示せ。



(2) 3つの抵抗が直列につながれたときの合成抵抗 R が

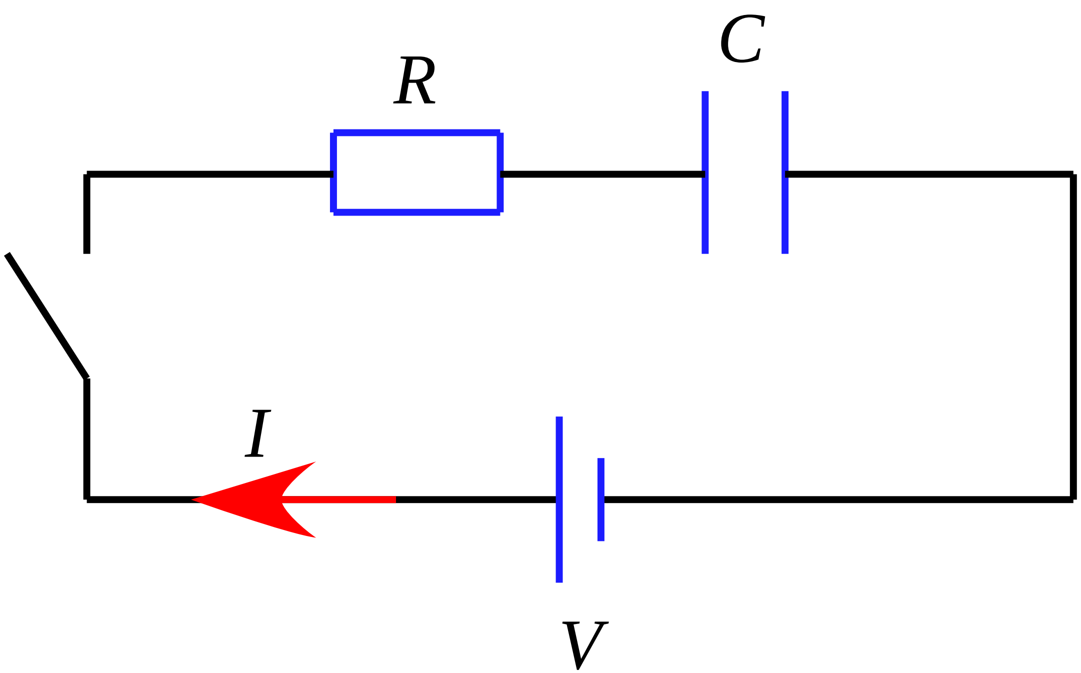
$$R = R_1 + R_2 + R_3$$

であることを示せ。



回路の方程式～例題

次のRC回路を考える。スイッチを入れる前にはコンデンサーに電荷は蓄えられていないものとする。
スイッチを入れた時刻を $t=0$ として、以下の問に答えよ。



(1) 回路方程式を記述せよ。
ある時刻 t におけるコンデンサーの電荷を $Q(t)$ としてよい。

(2) 図の向きを正として、$t=0$における電流の値を求めよ。

(3) 十分に時間が経った後のコンデンサーの電荷Qの値を求めよ。

(4) Q - tグラフを描け。

また、Q - tグラフの原点での傾きを記述せよ。