運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

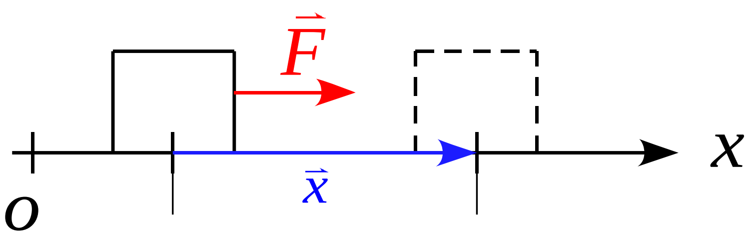
モーメントと角運動量の関係

仕事の定義～

仕事と力の関係

物理における「仕事」＝力がする働き

物体に力を加えて、
物体を移動させる事



定義

力 Fが物体にした仕事W (Work) は、

$$W = F \cdot x$$

と定義される。

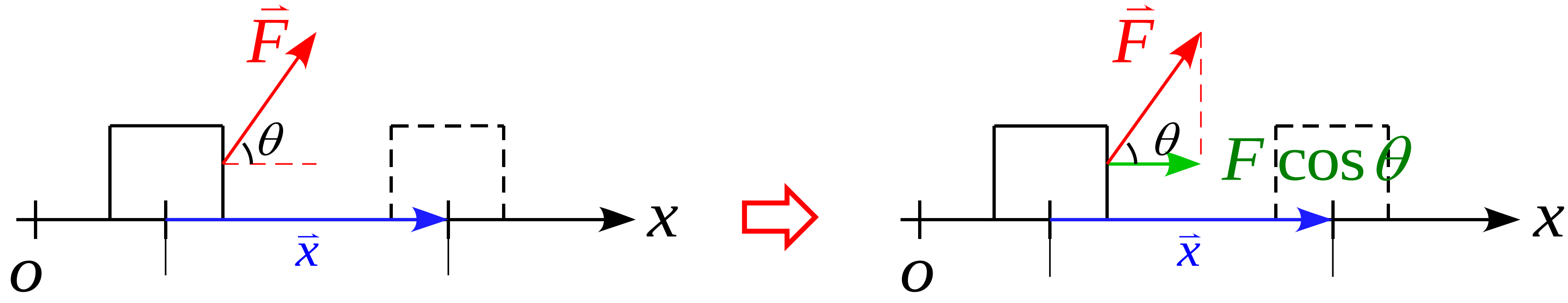
「力 Fが物体に仕事 Wをした」

「物体は力 Fに仕事Wをされた」

次元

$$\frac{[ML]}{[T^2]}[L] = \frac{[L^2 M]}{[T^2]}$$

斜め上に引っ張る



力 $\vec{F}$ が物体にした仕事 W は

$$W = F\cos\theta \cdot x$$

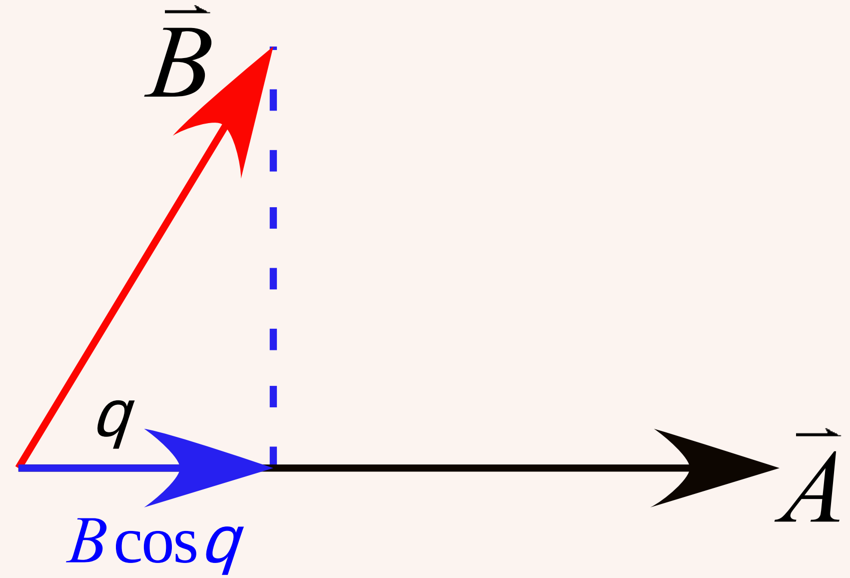
$$= Fx\cos\theta$$

仕事～ベクトルの内積

ベクトルの内積

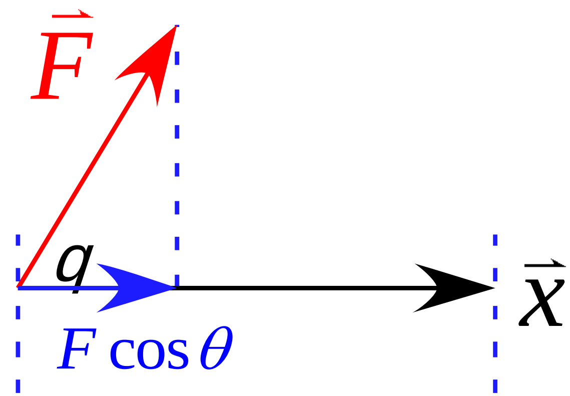
$$\vec{A}\cdot\vec{B}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B}=AB\cos\theta$$



これを仕事に応用すると

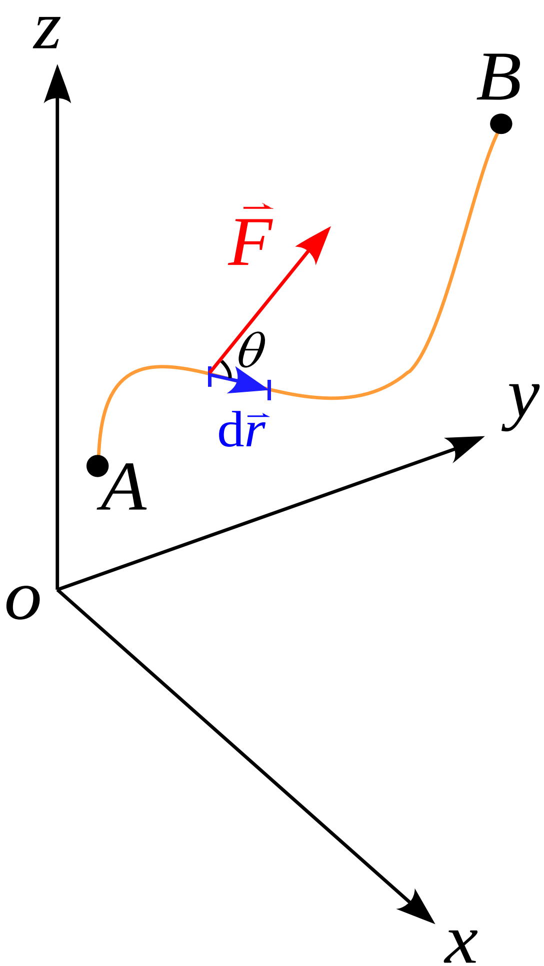
$$\vec{F}\cdot\vec{x}=Fx\cos\theta$$



つまり、

$$W=\vec{F}\cdot\vec{x}$$

仕事の定義～一般化



微小仕事 dW

$$dW = F\cos\theta dr$$

$$= \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

全仕事 W

$$W = \int_c \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

線積分

運動方程式からの導出 (3次元空間)

運動方程式

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

を、$d\vec{r}$ の内積をとって積分すると

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot \vec{v}dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

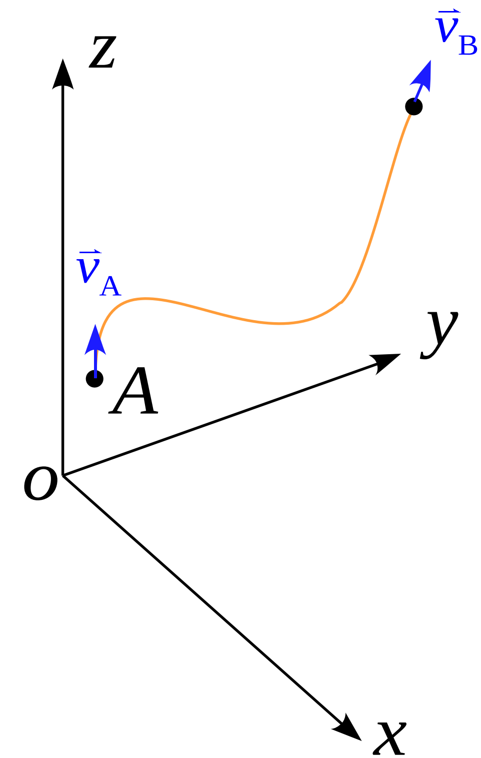
$$\int m\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)dt = \int F\cdot d\vec{r}$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int F\cdot d\vec{r}$$

ここで初期条件を

$$\vec{v}(t_{\mathrm{A}}) = v_{\mathrm{A}}$$

$$\vec{v}(t_{\mathrm{B}}) = v_{\mathrm{B}}$$



と設定すると

$$\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_\mathrm{A})}^{v(t_\mathrm{B})} = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2 = \int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_\mathrm{B}^2 - \frac{1}{2}mv_\mathrm{A}^2}_{\text{運動エネルギーの変化量}\ \Delta K} = \underbrace{\int_\mathrm{A}^\mathrm{B} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}}_{\text{仕事}}$$

運動方程式からの導出 (1次元直線)

運動方程式

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

を、xで積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int Fdx$$

$$\int \boxed{m\frac{dv}{dt}} v dt = \int Fdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int Fdx$$

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$

$$x(t_1) = x_1 \qquad x(t_2) = x_2$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{x_1}^{x_2} Fdx$$

力 Fが一定であるとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \left[Fx\right]_{x_1}^{x_2}$$

$$\frac{1}{2}mv(t_2)^2 - \frac{1}{2}mv(t_1)^2 = F\left(x_2 - x_1\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2} = \boxed{F\left(x_2 - x_1\right)}$$

運動エネルギーの変化

外力の仕事

運動方程式からの導出 ～ 計算法

3次元(ベクトル)

$$\int m \boxed{\frac{d\vec{v}}{dt}} \cdot \vec{v} dt \Rightarrow \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}$ に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}$$

元は同じもの

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}(|\vec{v}||\vec{v}|\cos\theta) = \frac{d}{dt}(vv\cos 0) = \frac{d}{dt}(v^2)$$

従って、

$$2\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}(v^2)$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

運動方程式からの導出 ～ 計算法

1次元

$$\int m \boxed{\frac{dv}{dt}} v dt \Rightarrow \int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt$$

$\frac{dv}{dt}v$ に着目

合成関数の微分

$$\frac{d}{dt}(vv) = \frac{dv}{dt}v + v\frac{dv}{dt} = 2\frac{dv}{dt}v$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(v^2\right)$$

元は同じもの

従って、

$$2\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(v^2\right)$$

$$\frac{dv}{dt}v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$$

仕事率

定義

仕事率：単位時間あたりの仕事

$$\overline{P} \equiv \frac{\mathrm{D}W}{\mathrm{D}t}$$

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

国際単位：ワット　[W =J / S]

1秒間に1 [J] の仕事をするときの仕事率が1 [W]

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L]\frac{1}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T^3]}$$

瞬間の仕事率

$$P \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

仕事 dW は

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

従って、

$$P = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \boxed{\frac{d\vec{r}}{dt}} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

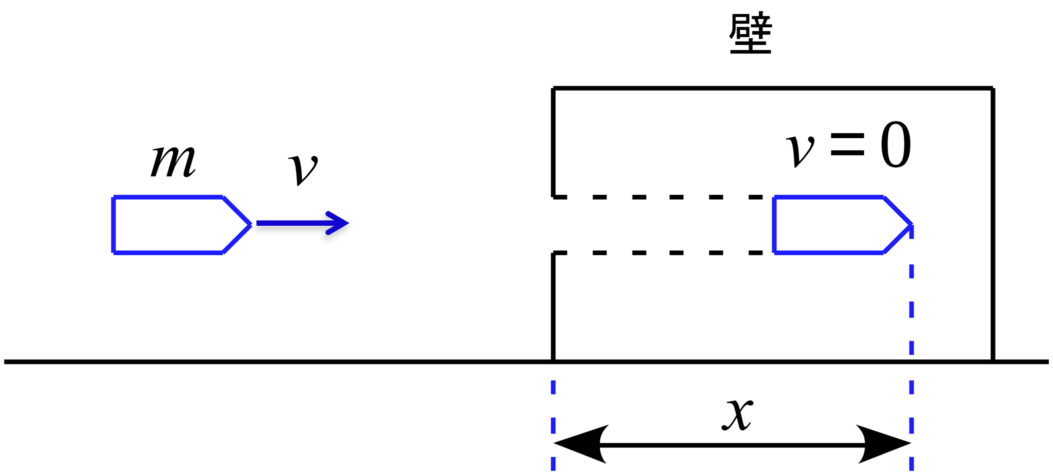
エネルギー

ある物体が、他の物体に対して力を及ぼし
仕事をする能力をもつとき、
その物体はエネルギーを持っているという

仕事をする能力＝エネルギー

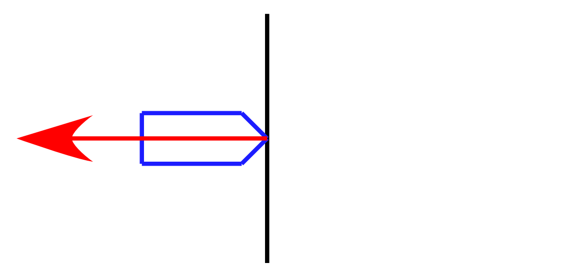
例

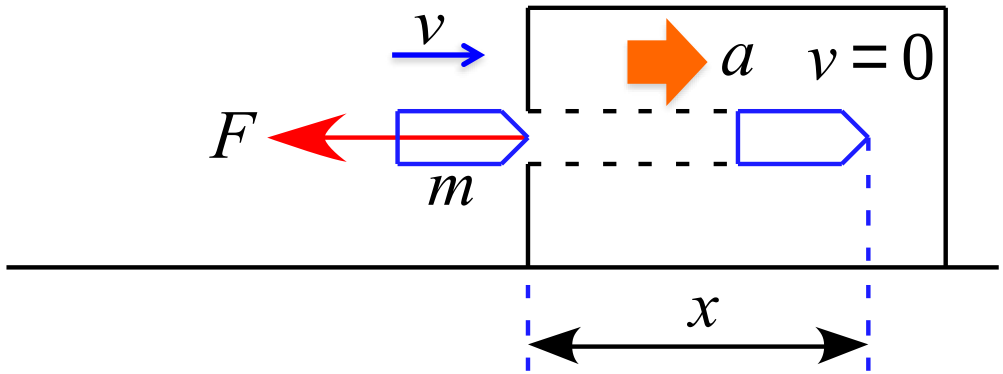
質量 m の弾丸が壁に打ち込まれる



壁から受ける力 F が一定とすると

この運動は等加速度運動と考えることができる





水平方向の運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

となる。両辺を x で積分すると

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int(-F)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int(-F)dx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int(-F)\,dx$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_0^x(-F)\,dx$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_0)}^{v(t_1)} = \left[-Fx\right]_0^x$$

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}mv^2 = -Fx + F\cdot 0$$

エネルギー～運動エネルギー

従って

$$\frac{1}{2}m\cdot 0^2 - \frac{1}{2}m\cdot v^2 = -Fx$$

最後の運動能力　最初の運動能力　弾丸がされた仕事

運動エネルギーの変化は、外力の仕事によるものである

運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$ [J = kg m^2 / s^2]

次元

$$[M]\left(\frac{[L]}{[T]}\right)^2 = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

質量と速度の2乗に比例

エネルギー～位置エネルギー

重力による位置エネルギー

基準から力Fで $x=0$ から$x=h$ まで持ち上げたとする

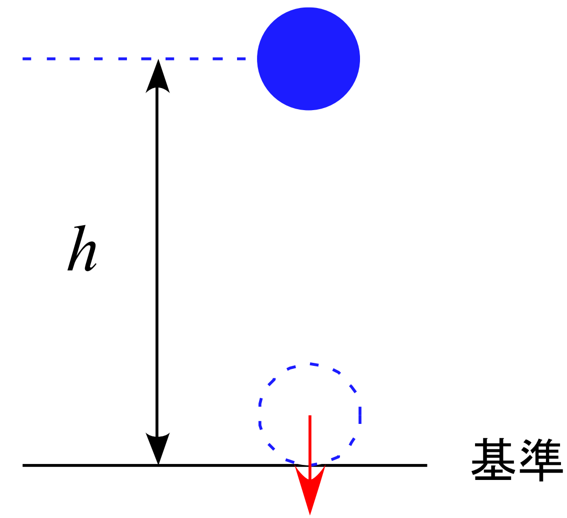
運動方程式は

$$ma = F - mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = F - mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int (F - mg)dx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int (F - mg)dx$$



$$\boxed{\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt} = \boxed{\int (F - mg)dx}$$

運動エネルギーの変化　　外力の仕事

エネルギー～位置エネルギー

準静的に持ち上げたとすると

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_0^0 = \int_0^h (F - mg)\,dx$$

$$0 = \int_0^h F\,dx + \int_0^h (-mg)\,dx$$

$$\int_0^h mg\,dx = \int_0^h F\,dx$$

$$\left[mgx\right]_0^h = \int_0^h F\,dx$$

$$\boxed{mgh} = \boxed{\int_0^h F\,dx}$$

重力による
位置エネルギー

持ち上げた
仕事

エネルギー～位置エネルギー

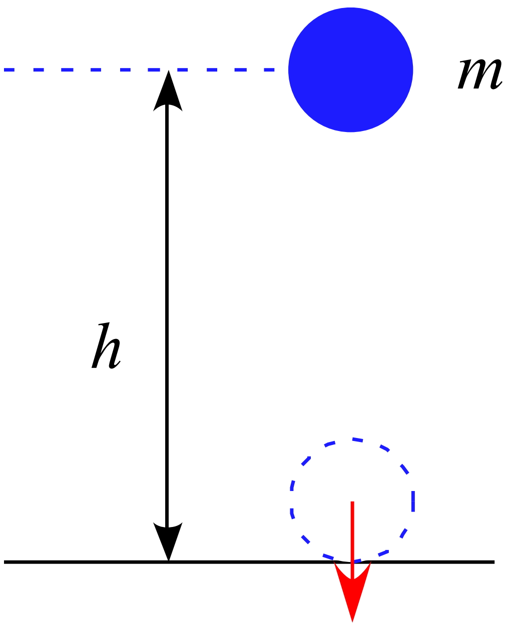
重力による位置エネルギー

重力 mg に逆らって h だけ持ち上げた

下から持ち上げるときにした仕事は

$$W = F \cdot h = mg \cdot h$$

この仕事によって物体は位置エネルギーを得た



重力による位置エネルギー

$$U = mgh$$ [J = kg m² / s²]

基準からの高さに比例

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]}[L] = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$

エネルギー～自由落下

自由落下

運動方程式は

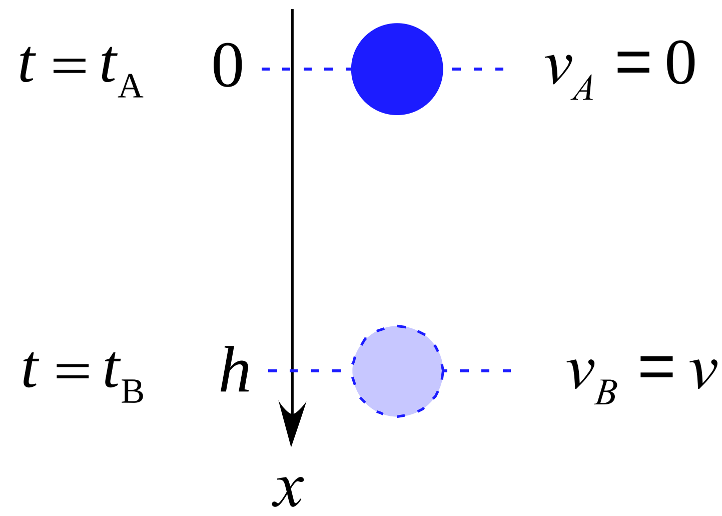
$$ma = mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\int m\frac{dv}{dt}dx = \int mgdx$$

$$\int m\frac{dv}{dt}vdt = \int mgdx$$

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int mgdx$$



エネルギー～自由落下

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v_A}^{v_B} = \left[mgx\right]_0^h$$

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}m\cdot 0^2 = mgh - mg\cdot 0$$

$$\boxed{\frac{1}{2}mv^2} = \boxed{mgh}$$

運動エネルギーの変化　　外力の仕事

$$\frac{1}{2}mv^2 + \left(-mgh\right) = 0$$

運動エネルギー　　位置エネルギー

エネルギー保存則

エネルギー保存則

エネルギーは無くなったり増えたりしない

$$\frac{1}{2}mv^2+\left(-mgh\right)=0$$

(重力場の運動)

運動方程式～エネルギー保存則

運動方程式からエネルギーを考える

運動方程式は

$$ma = F \quad a = \frac{dv}{dt}$$

より、

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = F\frac{dx}{dt}$$

となる

ここで初期条件を

$$v(t_1) = v_1 \qquad v(t_2) = v_2$$
$$x(t_1) = 0 \qquad x(t_2) = x$$

$$t = t_1 \qquad t = t_2$$

と設定する

t で積分すると

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int_{t_1}^{t_2} F\frac{dx}{dt}dt$$

$$\left[\frac{1}{2}mv^2\right]_{v(t_1)}^{v(t_2)} = \int_0^x Fdx$$

$$\boxed{\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2} = \boxed{\int_0^x Fdx}$$

運動エネルギーの
変化量

$x = 0$ から x まで
物体に働く力 F がした仕事

運動エネルギーの変化は外力の仕事に等しい

運動方程式～エネルギー保存則

$v=\frac{dx}{dt}$ をかける ⇒ 単位時間あたりの変位をかけた

$$mv\frac{dv}{dt}=F\frac{dx}{dt}$$

単位時間あたりの
仕事とエネルギーの関係式

t で積分する ⇒ 最初から最後まで時間に対して和を取る

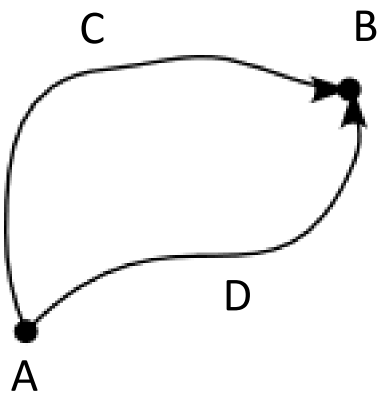
$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt=\int_{t_1}^{t_2}F\frac{dx}{dt}dt$$

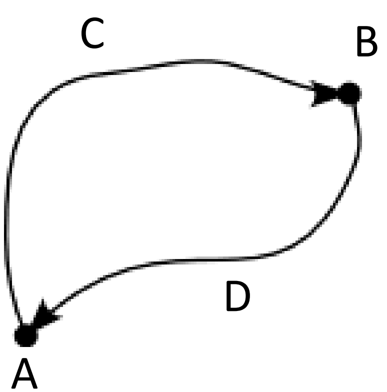
最初と最後の
エネルギーと仕事の関係式

エネルギー方程式

保存力

保存力での経路





点Aから点Bまでに行くのに2つの経路を考える

ここでの運動が保存力による運動とすると

点A－C－点Bの経路を通り、
そこからDを経由して点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ACB} + W_{BDA} = 0$$

点A－D－点Bの経路を通り、同じ道を通って
点Aに戻るときの仕事は

$$W_{ADB} + W_{BDA} = 0$$

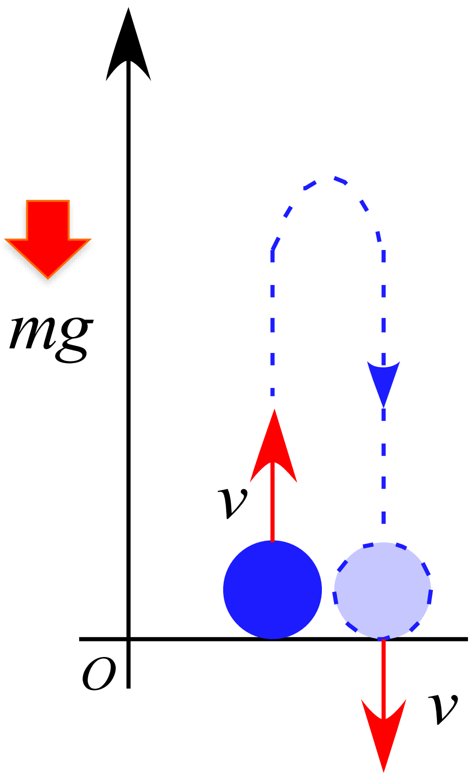
よって

$$W_{ACB} = W_{ADB}$$

保存力のする仕事は移動経路によらない

保存力

この計算の意味を考えるために簡単な例を考える



鉛直投げ上げ運動

この運動における仕事は

$$W = \int_0^0 F dx = \int_0^0 (-mg)\, dx = 0$$

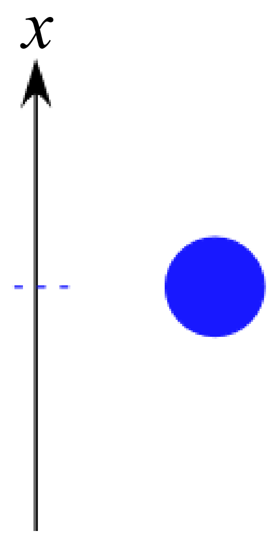
元の位置に戻るまでに力がした仕事がゼロになる

↓

保存力

エネルギー保存則～自由落下

自由落下の運動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-mgx\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + mgx$ は時間に対して

変化しない一定量

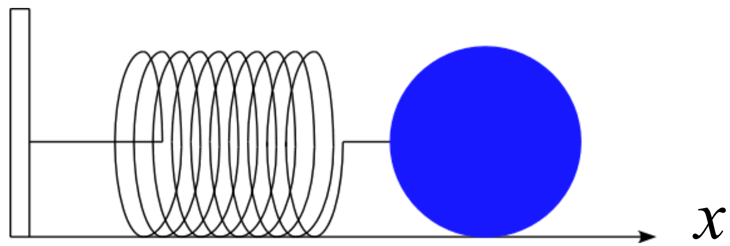
$$\frac{1}{2}mv^2 + mgx = 一定$$

運動エネルギーと位置エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

エネルギー保存則～バネの単振動

(摩擦力なし)

バネの単振動



運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = -kx$$

と表すことができる

この両辺に $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = -kx\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}\left(-\frac{1}{2}kx^2\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2}\right) = 0$$

となる

よって、$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$は時間に対して

変化しない一定量

$$\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = 一定$$

運動エネルギーとバネの弾性エネルギーの和が一定であるからエネルギー保存則が成り立っている。

仕事とエネルギー～例題

水平面とのなす角 θ の摩擦がある斜面を質量 m の物体がすべり下りる運動を考える。以下の問いに答えよ。
但し、動摩擦力は $f=\mu_k N$ として用いてよいとする。

(1) この運動の運動方程式を記述せよ。

(2) この運動の加速度 a を求め、この運動が等加速度運動であることを示せ。

時刻 t_1 で物体が距離 L を移動したとする。

(3) 運動方程式の両辺を x で積分し、仕事とエネルギーの関係式を導け。
$v(0)=v_0, x(0)=0, v(t_1)=v_1, x(t_1)=L$ とする。

(4) 動摩擦力がした仕事 $W_{摩}$ を求めよ。