運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

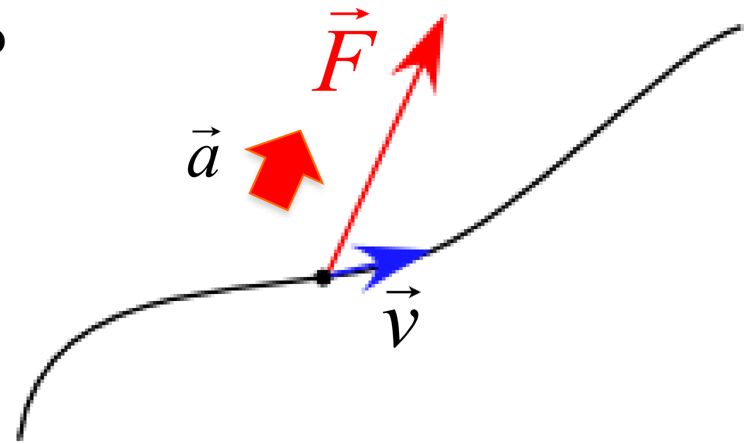
仕事とエネルギーの関係

力積と運動量の関係

モーメントと角運動量の関係

運動量〜定義

質量 m の質点が力 $\vec{F}$ を受けて運動している



運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

加速度の定義から

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

であるから、

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{F}$$

運動量

ここで、$\vec{p} = m\vec{v}$ とおくと

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

となる。

運動量〜力積

運動量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

運動量 = 質量 × 速度

次元

$$[M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt}} = \vec{F}$$

単位時間あたりの
運動量の変化

この式を書き換えると

$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

運動量の
微小変化

力積

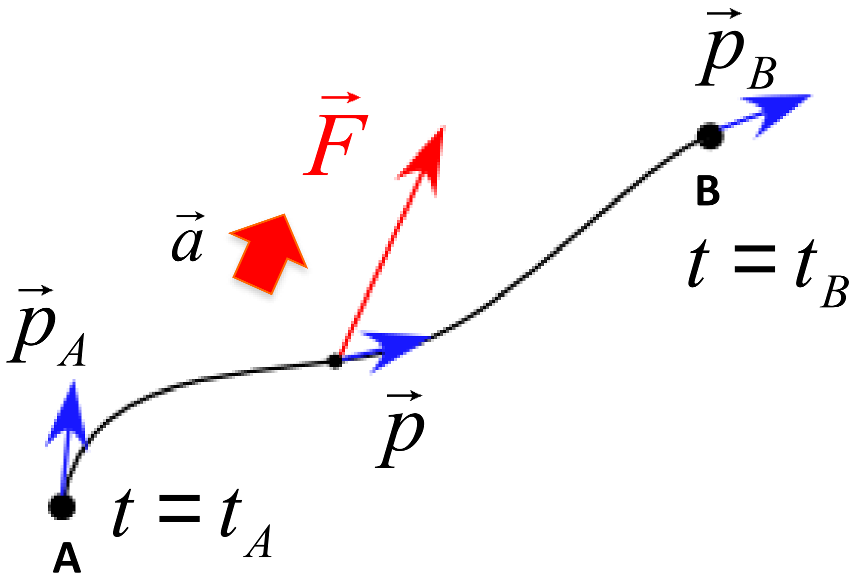
力 $\vec{F}$ が微小時間
dtだけ働いた

次元

力積

$$\vec{I} = \vec{F}dt \qquad \left[\frac{ML}{T^2}\right][T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

運動開始と運動終了を図のように設定する



$$\boxed{d\vec{p}} = \boxed{\vec{F}dt}$$

積分すると

$$\int_{p_A}^{p_B} d\vec{p} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt$$

$$\boxed{\vec{p}_A - \vec{p}_B} = \boxed{\int_{t_A}^{t_B} \vec{F}dt}$$

運動量の変化　受けた力積の総和

運動量～エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}mv_B{}^2 - \frac{1}{2}mv_A{}^2 = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか？)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}dt$$

力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか？)

運動量の変化は力積による

運動量〜保存則

物体が衝突した前後について
考えてみよう

運動方程式はA, Bそれぞれ

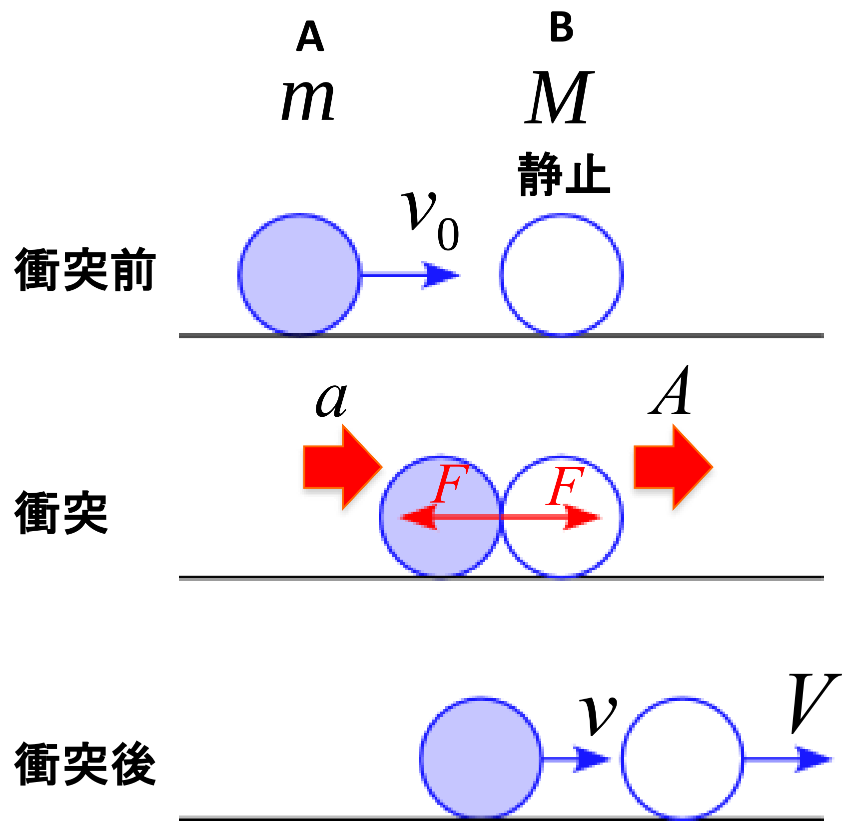
A： $ma = -F$

B： $MA = F$

従って、

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

$$M\frac{dV}{dt} = F$$



運動量〜保存則

この2式の和をとると

$$m\frac{dv}{dt}+M\frac{dV}{dt}=-F+F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)+\frac{d}{dt}(MV)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{mv+MV}\right)=0$$

運動量の合計

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$\underbrace{\boxed{mv+MV}}_{\text{衝突後の運動量}}=\underbrace{\boxed{mv_0+M\cdot 0}}_{\text{衝突前の運動量}}$$

が成立する。

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$\frac{d}{dt}\left(mv + MV\right) = 0$$

$$\boxed{mv + MV} = \boxed{mv_0 + MV_0}$$

衝突後の全運動量　　衝突前の全運動量

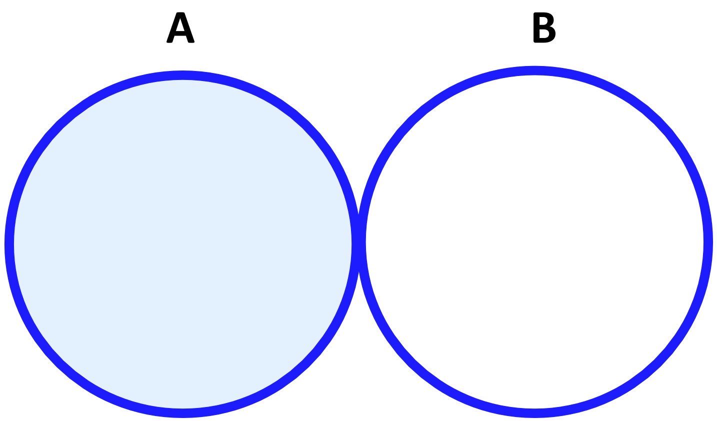
運動量保存則～例題

例題

２球の正面衝突を考える。

1. 衝突した瞬間の力を図に書き込め。

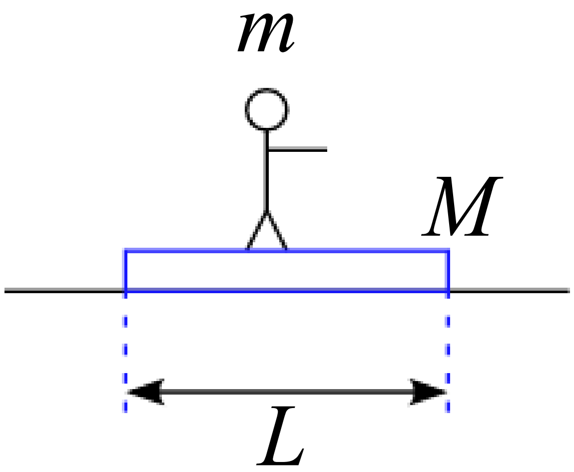
2. この運動で運動量が保存していることを示せ。



運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上に質量 M 、長さ L の板がある。
この板の上を質量 m の人が端から端まで歩くとする。



1. この運動に作用する力を図に書き込め。
   但し、板が人から受ける水平方向の力を F とする。

2. この運動で人と板の運動方程式を書け。

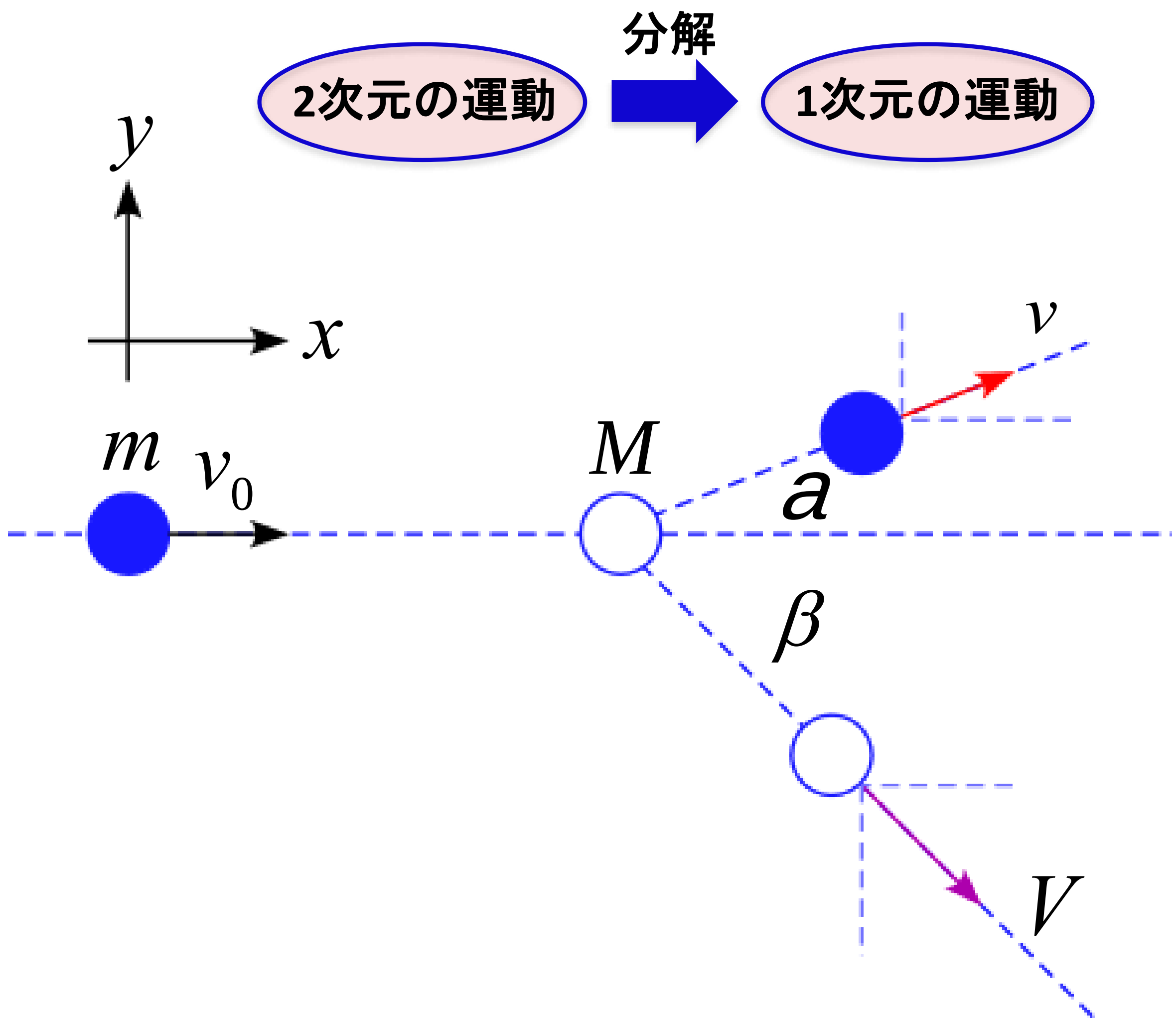
   但し、板の変位 $x_1(t)$ 、人の加速度 $x_2(t)$ とする。

3. 初速度 $v_0 = 0$ のとき、板の移動距離を求めよ。

斜衝突

斜衝突 (ビリヤード)

静止している白球に青玉を完全弾性衝突させる運動 (床との摩擦は無いとする)



運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right) = -\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right) = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2\right) = 0$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、
青玉の速度 $\vec{v}_1$
白玉の速度 $\vec{V}_2$
とする

外から外力が加わっていない → 前後の運動量については保存している

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2 = m\vec{v}_1{}' + M\vec{V}_2{}'$$

衝突前の全運動量　衝突後の全運動量

$$m\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

従って、

x 方向: $mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$

y 方向: $m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$

x 方向: $mv_0 = mv\cos a + MV\cos b$

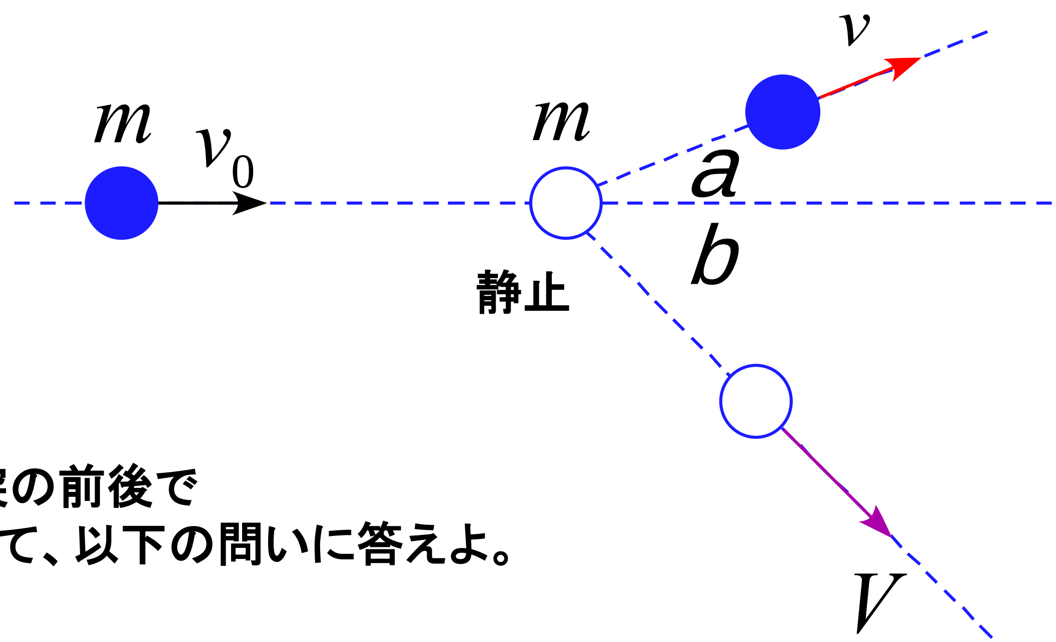
y 方向: $0 = mv\sin a - MV\sin b$

完全弾性衝突 → 前後でのエネルギーロスは無い

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

斜衝突～例題

斜衝突において、質量が同じであるとする。



衝突は弾性衝突であり、衝突の前後で
エネルギーは不変であるとして、以下の問いに答えよ。

1. 図の角 $\alpha + \beta$ を求めよ。

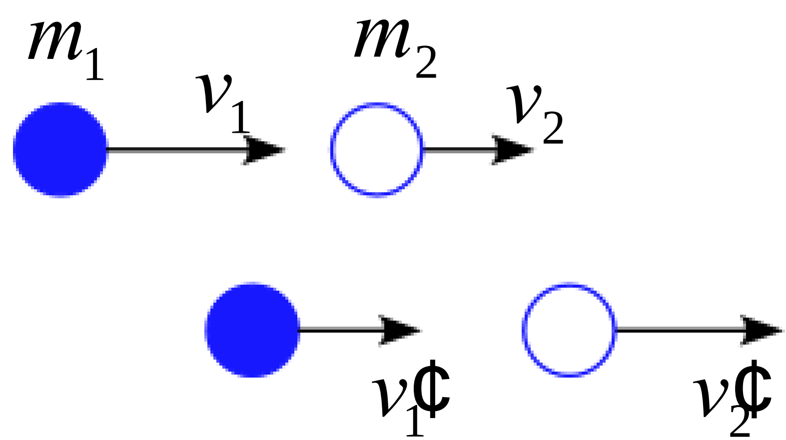
2. 速度比 $\dfrac{v}{V}$ を β を使って表せ。

反発係数

1次元の衝突

運動量保存則

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$



であるが、速度の情報が不十分である
そこで

同じ2物体の衝突では、
衝突前後の相対速度の大きさの比は一定

(経験的法則)

を用いてその比率を定義すると

反発係数 (跳ね返り係数) e

$$e = - \frac{v_1' - v_2'}{v_1 - v_2}$$

衝突後の相対速度

衝突前の相対速度

反発係数

2体の相対運動のエネルギーの変化を考えると

$$\Delta K = \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1' - v_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

完全弾性衝突: $e = 1$ **理想的によく弾む場合** → **エネルギー保存則が成立**

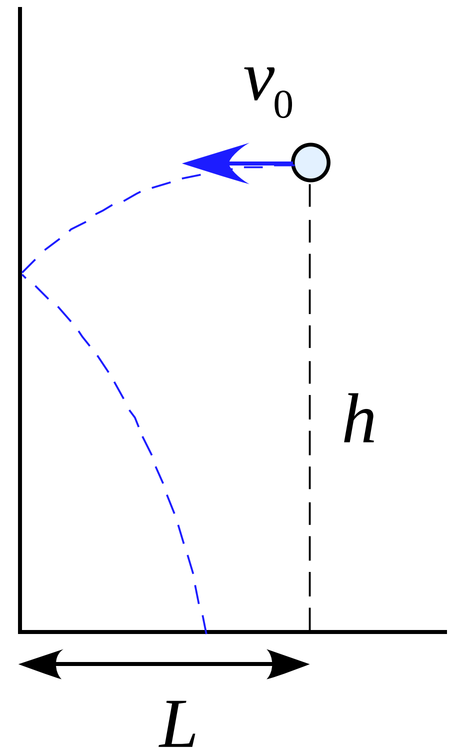
非弾性衝突: $0 \le e < 1$

完全非弾性衝突: $e = 0$ **2物体が一体になる場合**

運動量～例題

例題

質量 m の物体を高さ h の地点から壁に向かって水平方向に初速度 v_0 で投げたところ、壁に当たって跳ね返り、地面に落下した。
壁からの距離は L であり、壁と物体との間の反発係数は e である。
重力加速度を g として以下の問いに答えよ。



1. 物体が壁に当たる直前までの運動方程式を記述せよ。
2. 物体が壁に当たる時刻 t_1 を求めよ。
3. 物体が壁に衝突した瞬間の運動方程式を記述せよ。
   (水平方向のみでよい)
4. 物体が壁から受けた力積 I を求めよ。
5. 物体が壁に当たった後の運動方程式を記述せよ。
6. 落下点に到達する時刻 t_2 を求めよ。
7. 壁から落下点までの距離 l を求めよ。

運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたりm_0の物質を噴出しながら運動する物体がある

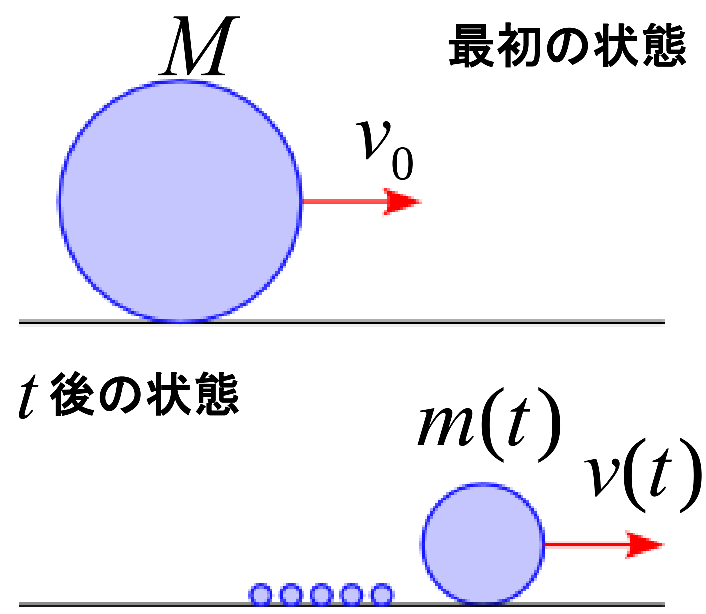
物体の初期質量をM、初速度をv_0とする

噴出物質の速度は常に0になるように噴出されるものとする

1. 時間 t 後の質量$m(t)$を記述せよ

2. 時間 t 後の速度 $v(t)$ を求めよ

3. 時間 t 後の移動距離$x(t)$を求めよ



運動量保存則～例題

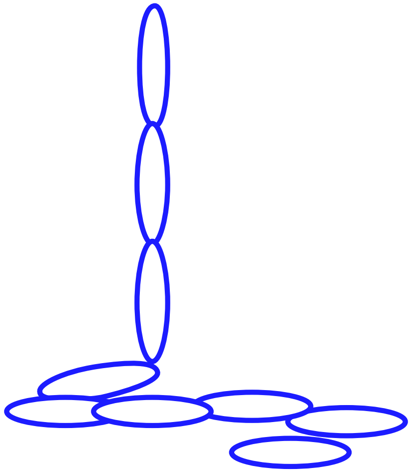
例題

床の上に線密度 ρ の鎖が置いてある。

この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。

重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さが x 、速度が v 、加速度が a となったとき



1. 引き上げた部分の質量 m を記述せよ。

2. この時の運動方程式を記述せよ。

3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。

4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}\,dt$$

モーメントと角運動量の関係

回転運動と角運動量

質点の運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

両辺に左から位置ベクトル $\vec{r}$ を

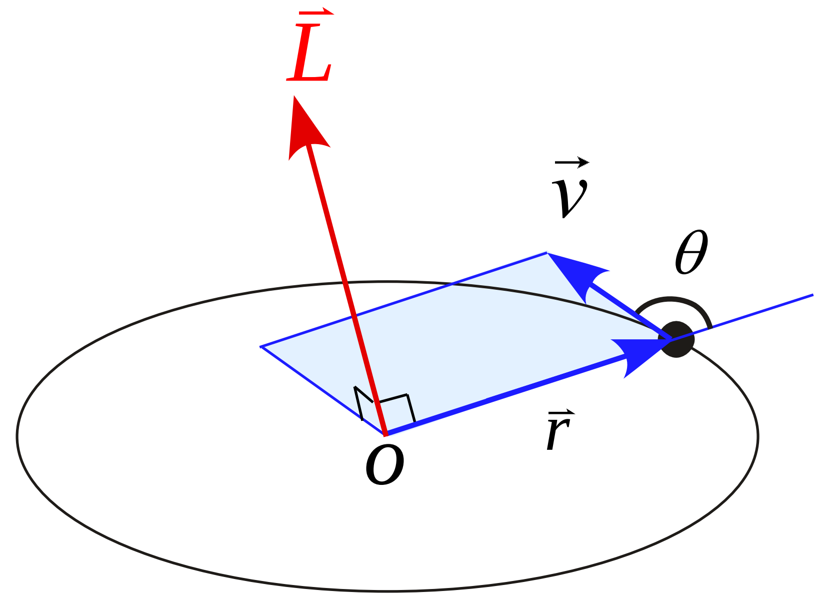
かけると(外積)

$$\vec{r} \times m\vec{a} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right) = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\vec{r} \times \vec{p}}\right) = \boxed{\vec{r} \times \vec{F}}$$

角運動量　　モーメント

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}}$$

回転運動と角運動量

途中の式変形について　(何故、$\vec{r}$ が微分の中に入るのか？)

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right)=\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}+\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$$=\vec{r}\times\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)$$

$\frac{d\vec{r}}{dt}=\vec{v}\,//\,m\vec{v}$ より

$\frac{d\vec{r}}{dt}\times m\vec{v}=\vec{0}$

課題5 (3)

$$\boxed{\frac{d}{dt}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{dt}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{dt}}$$

角運動量とモーメント

角運動量とモーメントの関係式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

$$L = \vec{r} \times \vec{p}$$

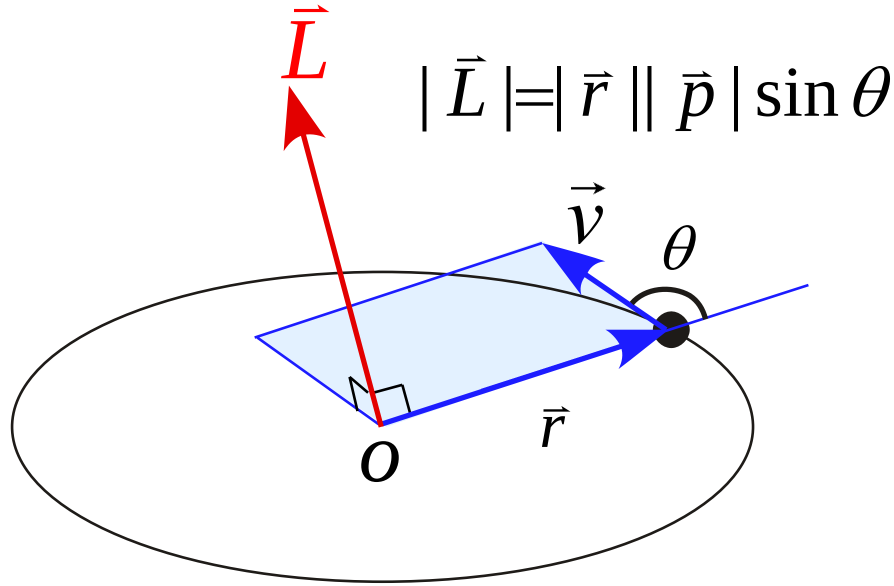
質点が点 O まわりを回転する勢いを表している

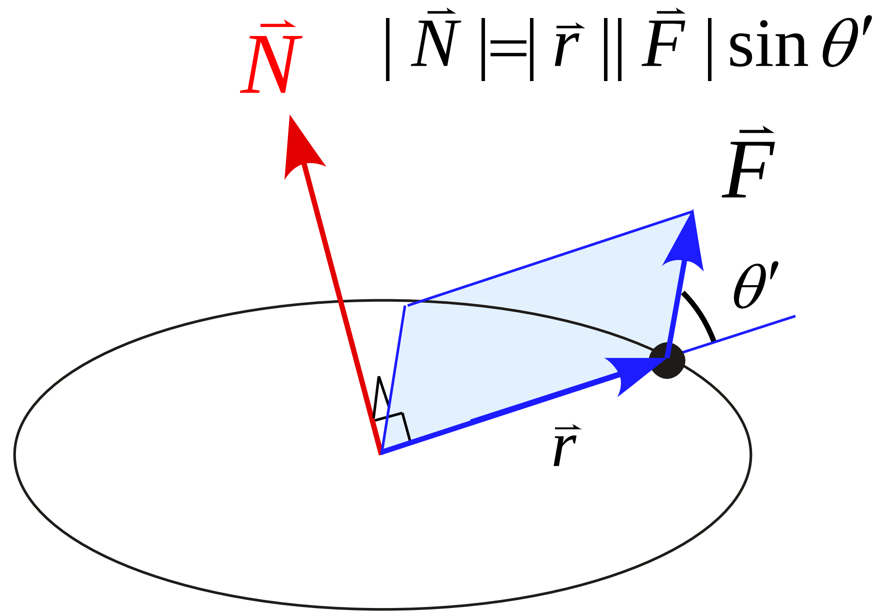
$$[L][M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML^2]}{[T]}$$

$$N = \vec{r} \times \vec{F}$$

点Oまわりの力のモーメント

$$[L][M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML^2]}{[T^2]}$$





角運動量保存則

角運動量とモーメントの関係式

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

ある質点の点 O まわりの

角運動量の変化は

この質点に働く点 Oまわりの

力のモーメントに等しい

もし、モーメント $\vec{N} = \vec{0}$ であれば

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

となり、角運動量は保存する

角運動量保存則

外力によるモーメントの総和 $\vec{N}$ が $\vec{0}$ のときは、内力が働いていたとしても、系の角運動量 $\vec{L}$ は変化しない

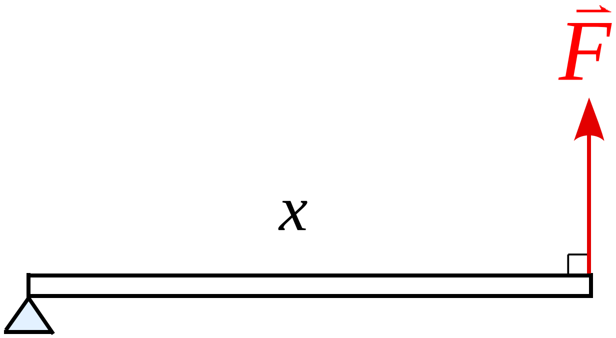
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$

力のモーメント～例題

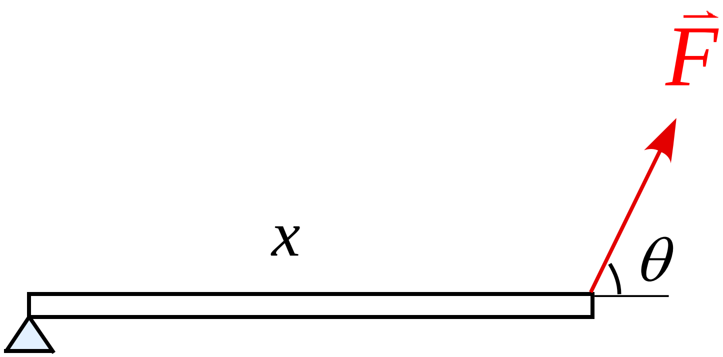
例題

以下の図の力のモーメント N を表せ。但し、棒の質量は無視できるとする。

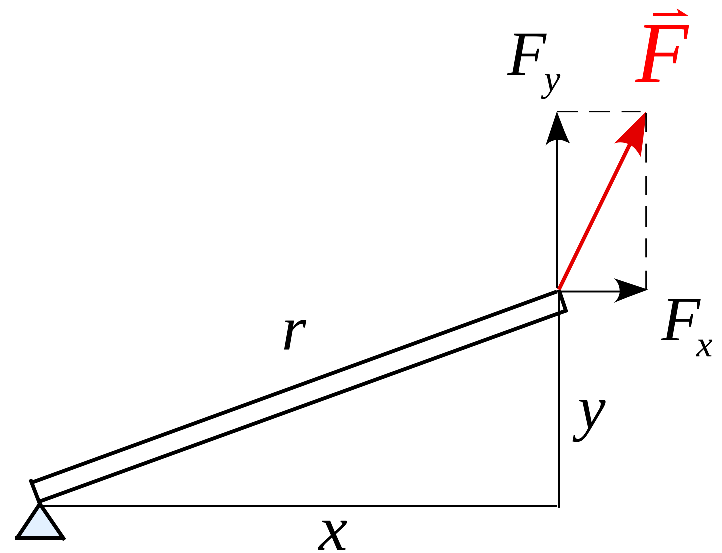
1.



2.



3.



力のモーメント～例題

例題

軽い棒の両端に質量 m の物体と質量 M の物体が図のように取り付けられていて点 o で糸につるされている。

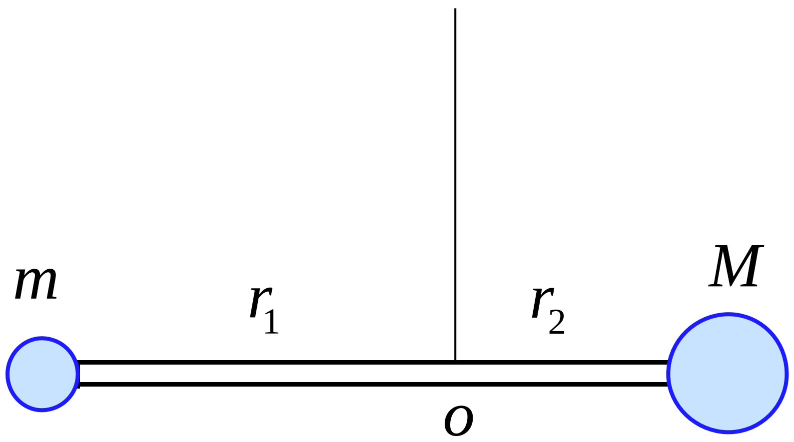
この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒に作用する力を書き込め。

2. 棒の運動方程式を記述せよ。

3. 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

4. 棒が回転しない条件 $\dfrac{r_1}{r_2}$ を求めよ。



力のモーメント～例題

例題

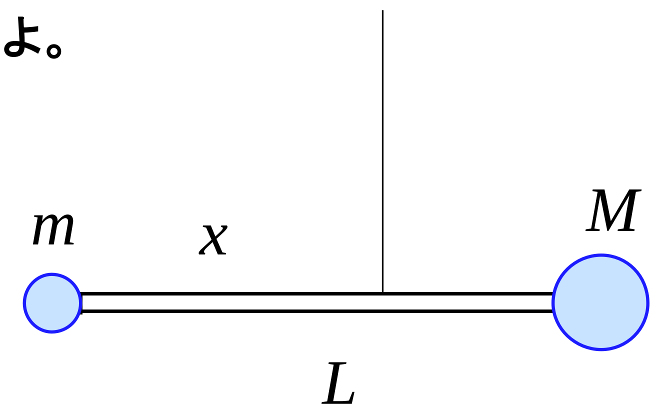
図のような長さ L の棒の両端に質量 m の質点と質量 M の質点が取り付けられ、糸でつるさている。

この棒が回転しない条件を考えたい。以下の問いに答えよ。

1. 棒の質量が十分に軽く無視できる場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。



2. 棒の質量が m の場合

(1) 棒の回転の運動方程式を記述せよ。

(2) 棒が動かないための糸をつるす位置 x を求めよ。

中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている

力 $\vec{F}$ の作用線が常にある任意の点 O を通る

中心力

$$\vec{F}(r) = \underbrace{F(r)}_{\text{力の大きさ}} \underbrace{\boxed{\frac{\vec{r}}{r}}}_{\text{力の向き}}$$

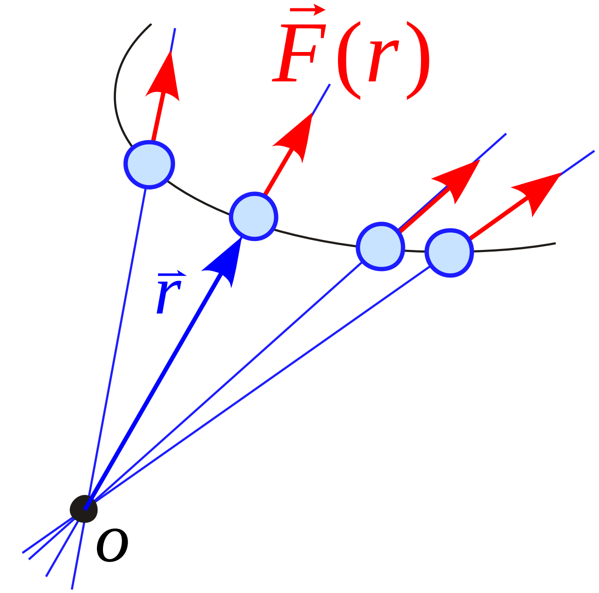
力の大きさ

力の向き

単位ベクトル

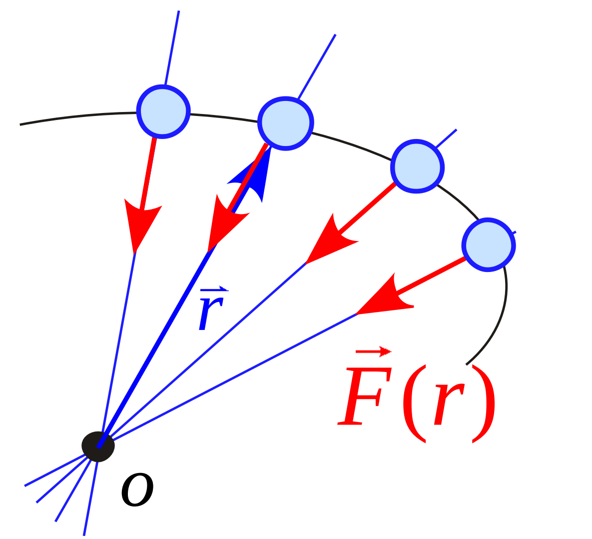
$F(r) > 0$

(斥力)



$F(r) < 0$

(引力)



中心力～角運動量保存

角運動量の変化を計算すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times m\vec{v}\right)$$

$$= m\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$= 0 + \vec{r} \times \boxed{F(r)\frac{\vec{r}}{r}}$$

中心力

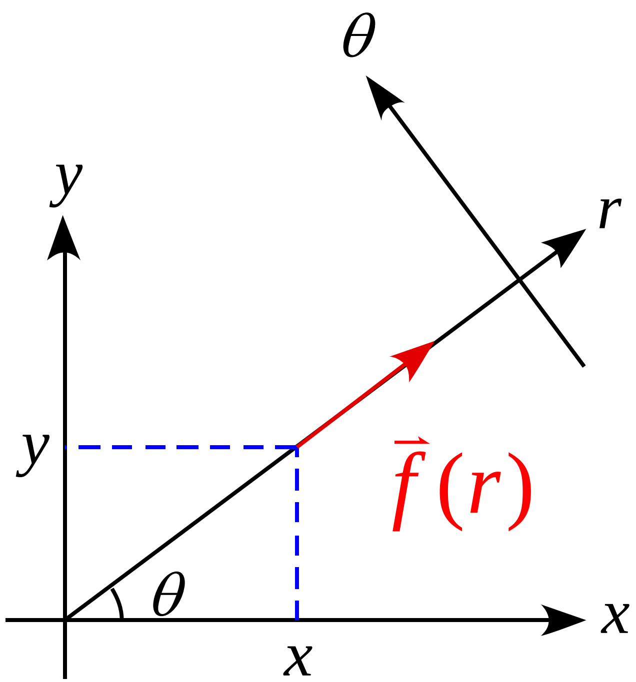
$$= 0$$

従って、**中心力が働く運動では角運動量が保存する**

中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする

極座標表示を使用する



中心力は

r 方向 $F_r = F(r)$

θ 方向 $F_\theta = 0$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F(r)$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、a_r, a_θ は

$$\boxed{a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

と表されるので、

課題6 (2)

中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m\left[\frac{d^2r}{dt^2}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]=F(r)$$

動径方向の運動方程式

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

と表される

中心力～運動方程式

ここで、θ 方向の式が何を示しているか検討してみよう

変位は

$$x(t) = r\cos\theta$$

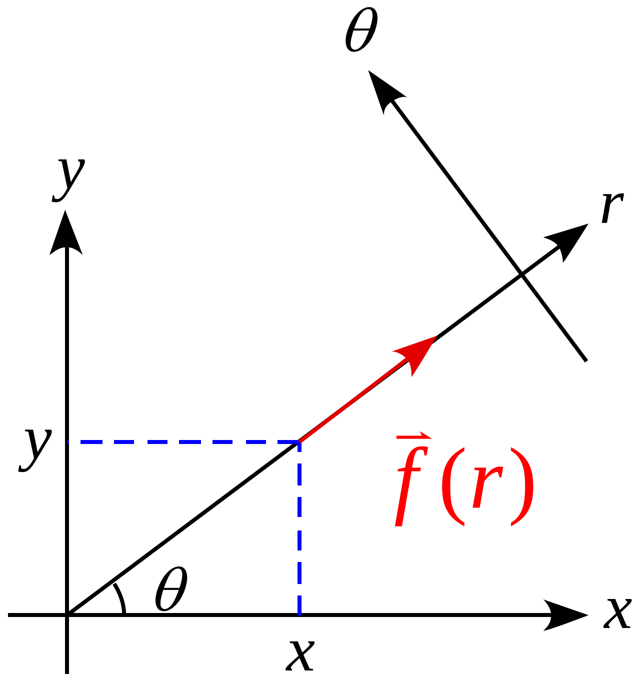
$$y(t) = r\sin\theta$$

である。
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量 L は

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p}$$

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

中心力～運動方程式

ここで、角運動量 $\vec{L}$ は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - r_x \cdot 0 \\ r_x p_y - r_y p_x \end{pmatrix}$$

と表される

課題 1 (1)

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

中心力～運動方程式

従って、z 成分だけ考えればよく

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r\cos\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\sin\theta + r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}\right] - r\sin\theta \cdot m\left[\frac{dr}{dt}\cos\theta - r\sin\theta\frac{d\theta}{dt}\right]$$

$$= rm\frac{dr}{dt}\cos\theta\sin\theta + r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} - rm\frac{dr}{dt}\sin\theta\cos\theta + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\cos^2\theta\frac{d\theta}{dt} + r^2 m\sin^2\theta\frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)$$

$$= r^2 m\frac{d\theta}{dt}$$

と表される

中心力～運動方程式

従って、θ方向の式において

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\right]=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^2\frac{d\theta}{dt}\right)=0$$

$$\frac{dL}{dt}=0$$

となる

即ち、

$$ma_\theta=0$$

は角運動量保存則を表している

角運動量～例題

例題

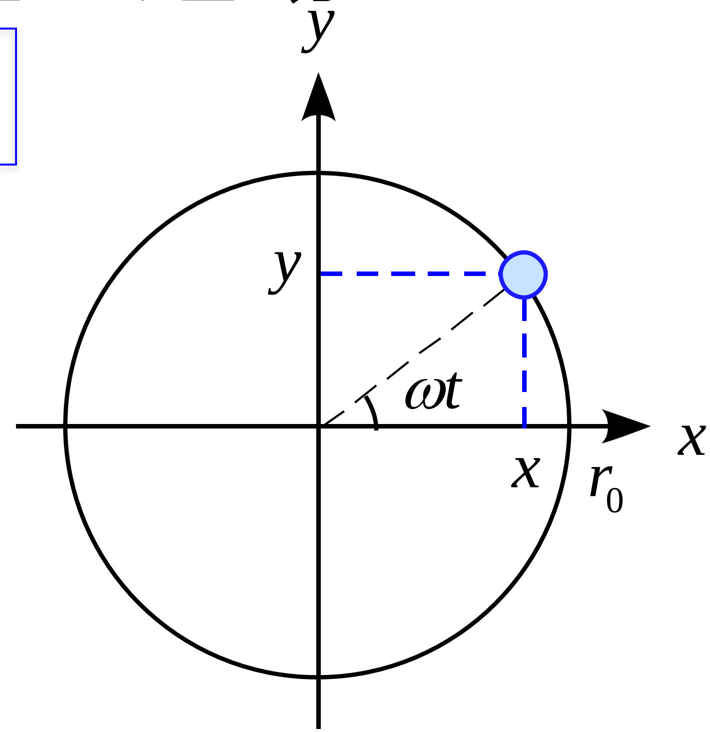
質量 m の質点が xy 平面で半径 r_0 の円運動をしている。
$t=0$で$(x,y)=(r_0,0)$ にあり、反時計まわりに角速度 ω で回転するとする。

1. 運動量 $\vec{p}=(p_x,p_y)$ を求めよ。

2. この運動における質点の角運動量 $\vec{L}$ を求めよ。

円運動～等速円運動

半径 r_0 角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動



ある時刻　t での位置は

$t = 0$ **で** $(x, y) = (r_0, 0)$**とすると**

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt}\left[r_0 \cos \omega t\right] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt}\left[r_0 \sin \omega t\right] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

円運動～等速円運動

従って、

$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2}=\sqrt{\left(-r_0\omega\sin\omega t\right)^2+\left(r_0\omega\cos\omega t\right)^2}$$

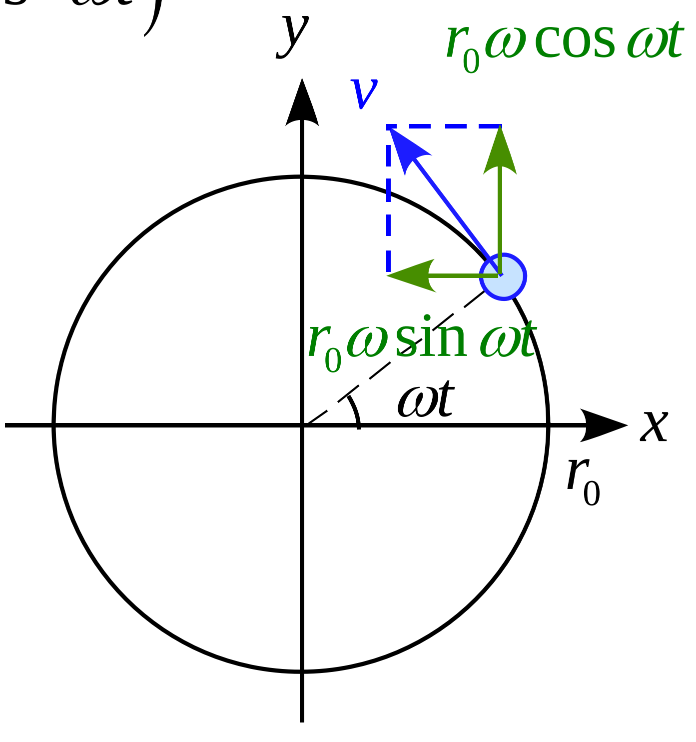
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\sin^2\omega t+{r_0}^2\omega^2\cos^2\omega t}$$

$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2\left(\sin^2\omega t+\cos^2\omega t\right)}$$

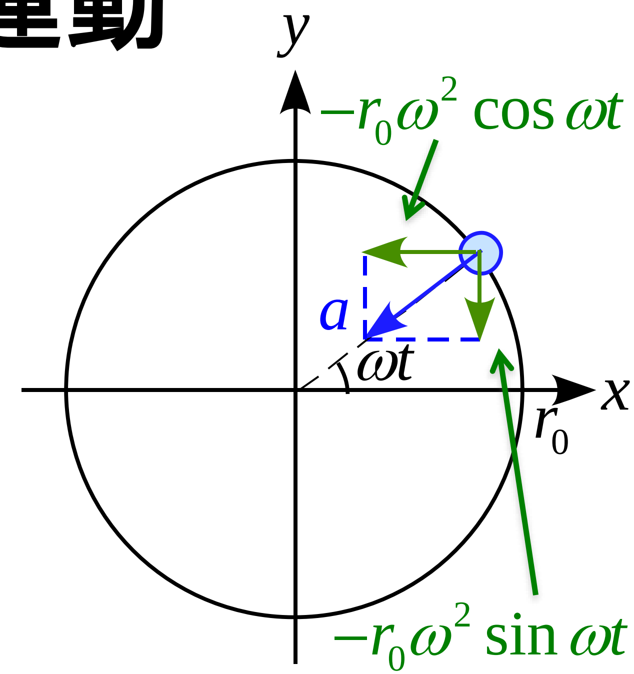
$$=\sqrt{{r_0}^2\omega^2}$$

$$=r_0\omega$$

となる。



円運動～等速円運動



加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}\left[-r_0\omega\sin\omega t\right] = -r_0\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}\left[r_0\omega\cos\omega t\right] = -r_0\omega^2\sin\omega t$$

と表される。

$$a = \sqrt{a_x{}^2 + a_y{}^2} = \sqrt{\left(-r_0\omega^2\cos\omega t\right)^2 + \left(-r_0\omega^2\sin\omega t\right)^2}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4\cos^2\omega t + r_0{}^2\omega^4\sin^2\omega t}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4\left(\cos^2\omega t + \sin^2\omega t\right)}$$

$$= \sqrt{r_0{}^2\omega^4} = r_0\omega^2$$

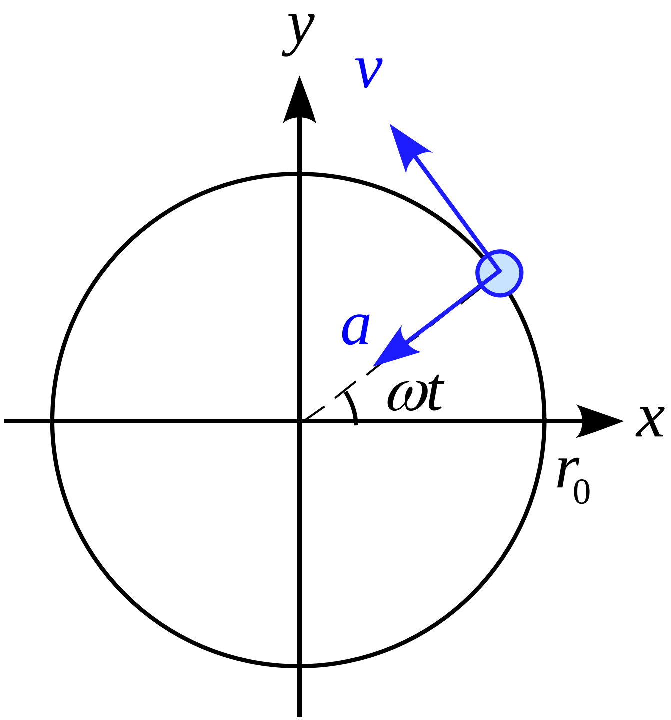
となる。

円運動～等速円運動

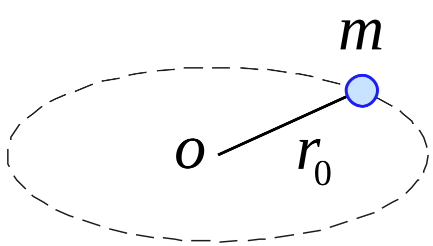
等速円運動　$\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定)

$$v = r_0 \omega$$

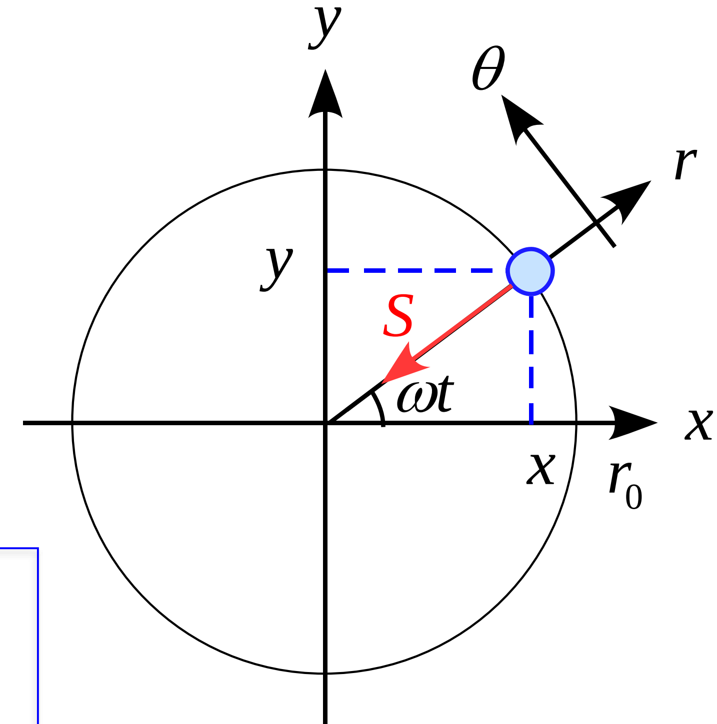
$$a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



円運動～運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$

a_r, a_θ

に代入

$$m\left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \right] = -S$$

$$m\left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = 0$$

円運動～運動方程式

糸の長さは $r = r_0$ (一定) なので $\dfrac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = S$$

$$mr_0\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

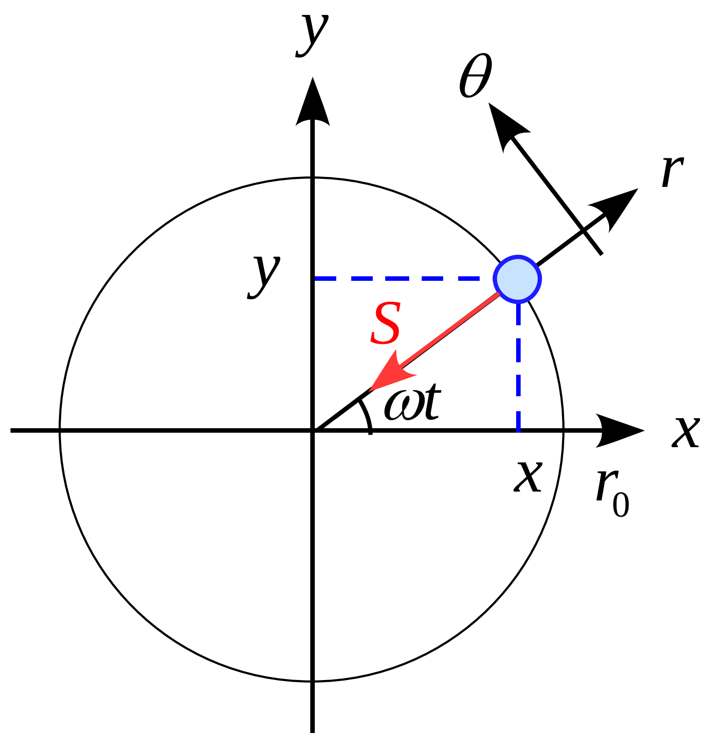
角速度 $\dfrac{d\theta}{dt} = \omega$ (一定) の等速円運動

とすると、

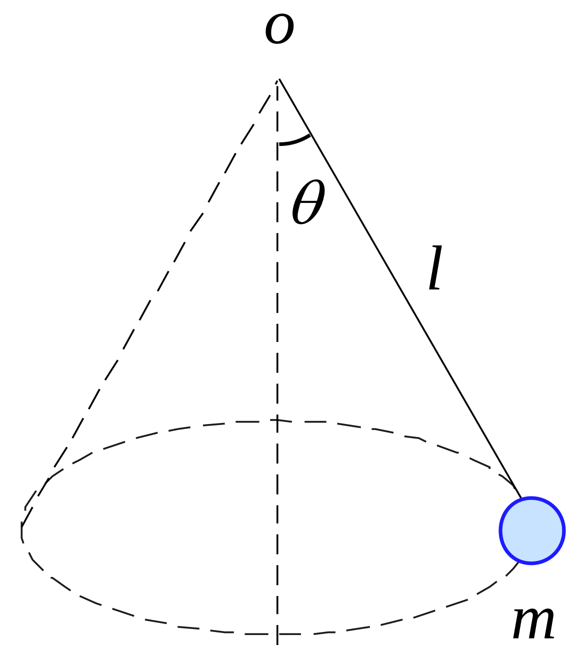
$$\boxed{mr_0\omega^2} = S$$

$$ma = S$$

中心方向に加速度があると考えられる



円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は θ であるとする。以下の問い に答えよ。

1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

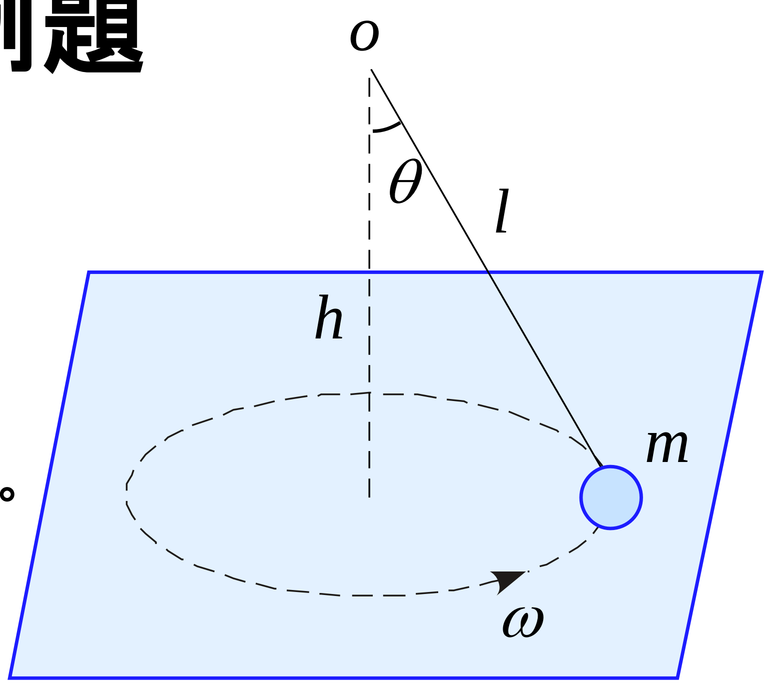
2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \qquad a_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

と表すことができる。
糸の張力 S 、物体の速さ v 、回転の周期 T を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。
糸の長さは l 、物体の質量は m である。
物体は水平面上で角速度 ω の円運動している。
糸は水平面から高さ h の地点に設置されている。
水平面は滑らかで摩擦は無視できるとする。
以下の問いに答えよ。

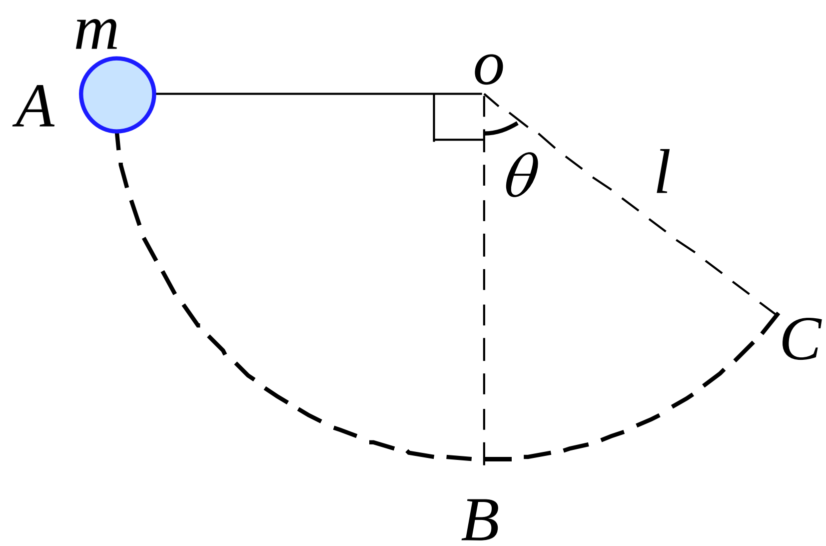
1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。

2. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

3. 糸の張力 S 、水平面からの垂直抗力 N を求めよ。

4. 角速度 ω が ω_0 を超えると水平面から離れる。ω_0 を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは l 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

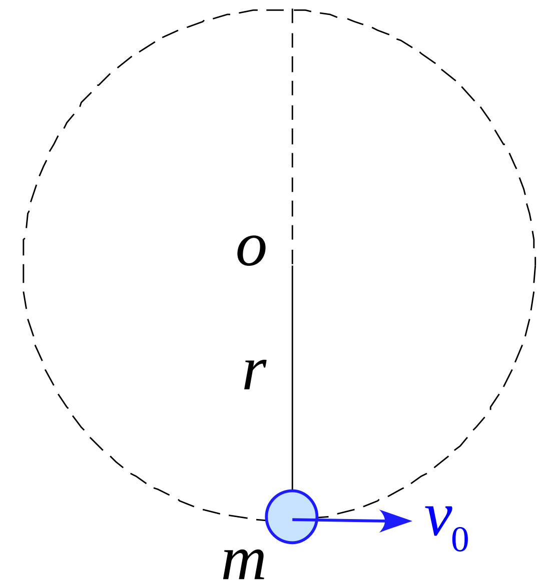
以下の問いに答えよ。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 最下点 B での糸の張力 T_B を求めよ。

3. 点 C での糸の張力 T_C を求めよ。

円運動～例題



例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは r 、物体の質量は m である。

物体を水平の状態にして放し、円運動する。

糸と鉛直線のなす角を θ であるとする。

最下点で初速 v_0 を与えたとき

以下の問いに答えよ。

1. r 方向、θ 方向の加速度を a_r, a_θ としたとき、
   それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 物体が1回転するために必要な初速 v_0 の条件を求めよ。

運動方程式から導かれる関係

運動方程式　$ma = F$

x で積分

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}m{v_2}^2 - \frac{1}{2}m{v_1}^2 = \int_{x_1}^{x_2} F\,dx$$

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{\vec{r}\times\vec{p}}\right) = \boxed{\vec{r}\times\vec{F}}$$

角運動量　　モーメント

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

t で積分

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F}\,dt$$

力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

・問題文で指定されている場合はそれを利用する
・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
・一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$$

t で積分

$v=$

t で積分

$x=$

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

解くことが困難

どの物理量の関係が必要か検討する

x で積分

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2=\int_{x_1}^{x_2}Fdx$$

t で積分

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B-\vec{p}_A=\int\vec{F}dt$$

左側から $\vec{r}$ で外積

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right)=\vec{r}\times\vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt}=\vec{N}$$

力学の講義を終えて

取り扱った内容

- 加速度 / 速度 / 変位
- 万有引力の法則
- ニュートンの運動の法則
- 仕事とエネルギー
- エネルギー保存則
- 運動量と力積
- 運動量保存則
- 力のモーメント
- 角運動量
- 角運動量保存則
- 円運動

取り扱っていない内容

- 単振動 / 単振り子
- ケプラーの法則
- 剛体の運動
- 慣性モーメント