変位～速度～加速度

変位

x

微分 →

← 積分

速度

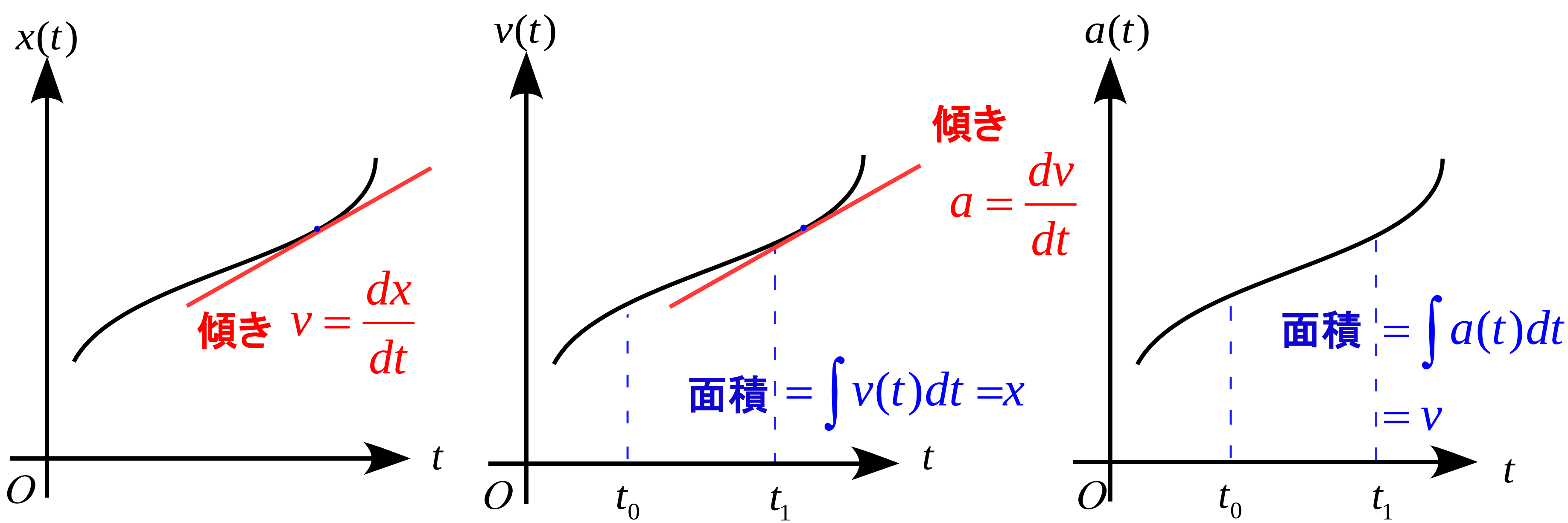
$$v = \frac{dx}{dt}$$

微分 →

← 積分

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$



力学小史

年代	年代	誰が	内容
B.C.	360頃	アリストテレス	重い物体は軽い物体より速く落下する
	320頃	アポロニウス	「円錐曲線論」
	300頃	ユークリッド	「原論」
	250頃	アルキメデス	てこの原理などの発見
A.C.	150頃	プトレマイオス	「アマルゲスト」(天文学の集大成)
	1543	コペルニクス	「天体の回転について」
	1581	ガリレイ	振り子の振動周期について
	1590	ガリレイ	「運動について」(落体の法則)
	1609	ケプラー	惑星の運動についての第1法則,第2法則の発見
	1619	ケプラー	惑星の運動についての第3法則を発見
	1637	デカルト	「方法序説」(解析幾何学について)
	1638	ガリレイ	「新天文学対話」
	1665	ニュートン	万有引力の発見
	1676	フック	バネに関する法則の発見
	1680	ニュートン	万有引力から惑星の軌道が楕円になることを証明
	1687	ニュートン	「プリンキピア：自然哲学の数学的原理」
	1788	ラグランジュ	「解析力学」
	1798	カヴェンディシュ	万有引力定数の測定(地球の質量の決定)
	1834	ハミルトン	正準方程式
	1905	アインシュタイン	特殊相対性理論

力～力の種類

物理での「力」の定義

・物体の運動状態を変化させるもの

・物体を変形させるもの

→ 力

力の種類 （3つ）

場の力

重力場 (Gravitational field) による力（重力）

電場 (Electric field) による力

磁場 (Magnetic field) による力

接触力

張力：糸などが物体を引っ張る力 (tension)
抗力：床や壁などが物体を押し返す力 (reaction force)
弾性力：バネやゴムなどが自然長に戻ろうとする力 (elastic force)
摩擦力：物体の面同士に働く力 (frictional force)

慣性力

質量が慣性をもつために現れる見かけの力
(電車の急発進)

物体に働く力を探す

場の力→接触力→慣性力 ← この順番で、どういう状態かを考える

1. 場の力はあるか？ （ 重力 ）

2. 接触力はあるか？

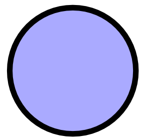
   ― 何かに接触しているか？
   ― それによって力が働いているか？

3. 慣性力はあるか？

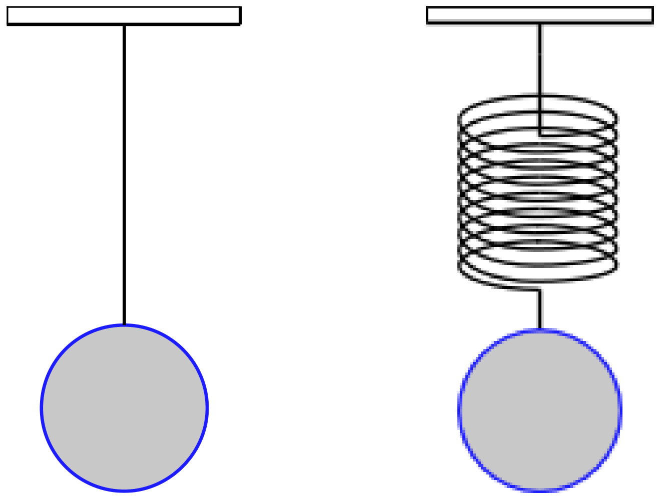
例題

次の図に作用する力を書き込め。

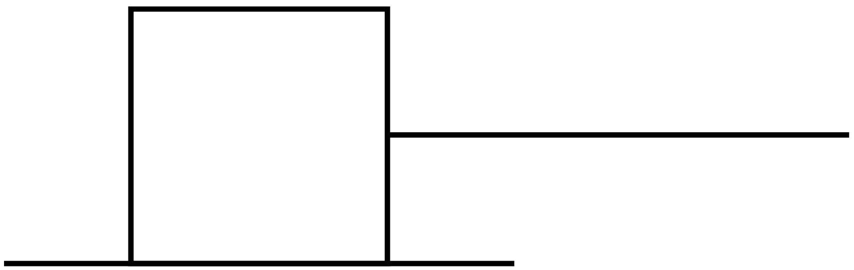
高い場所から物体を落とした



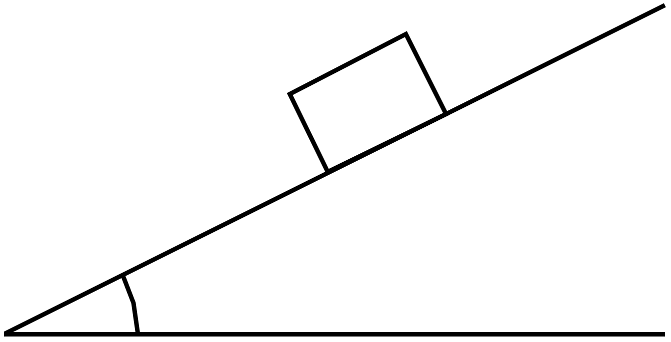
天井に吊るされている状態



糸でつながれている物体が
右に引っ張られる



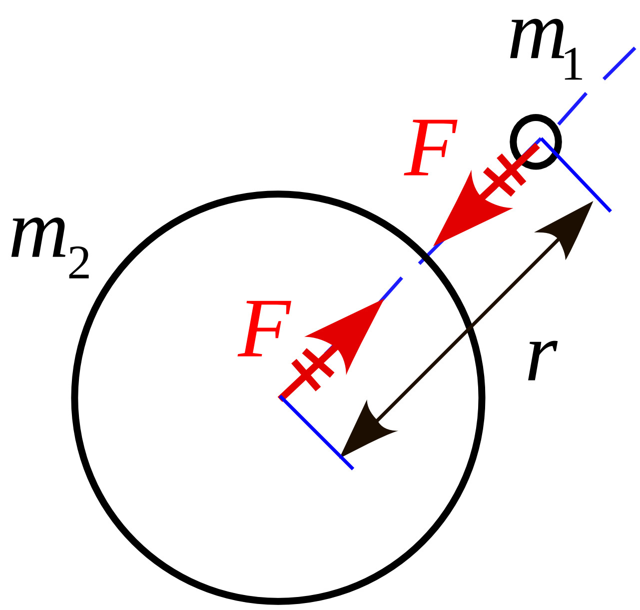
斜面を滑り降りる物体



万有引力の法則

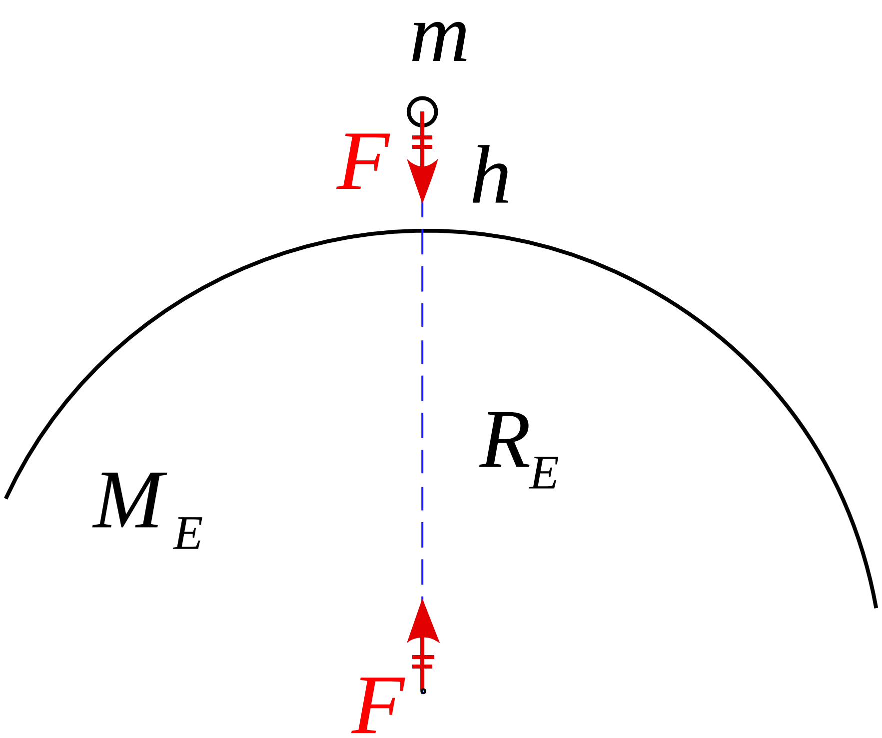
「質量をもつ2つの物体間には、それぞれの質量に比例し、それら2つの物体間の距離の2乗に反比例する引力が、2つの物体を結ぶ直線方向に働く」

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \qquad G = 6.673\times 10^{-11}\ [\mathrm{Nm^2/kg^2}]$$



万有引力の法則～重力

地球と地表の物体



$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

物体に働く万有引力は

$$F = G\frac{mM_E}{\left(R_E + h\right)^2}$$

$h \ll R_E$ より、$R_E + h \approx R_E$

と近似すると

$$F = G\frac{mM_E}{\left(R_E + h\right)^2} \approx G\frac{mM_E}{R_E{}^2}$$

$$= \frac{GM_E}{R_E{}^2}m$$

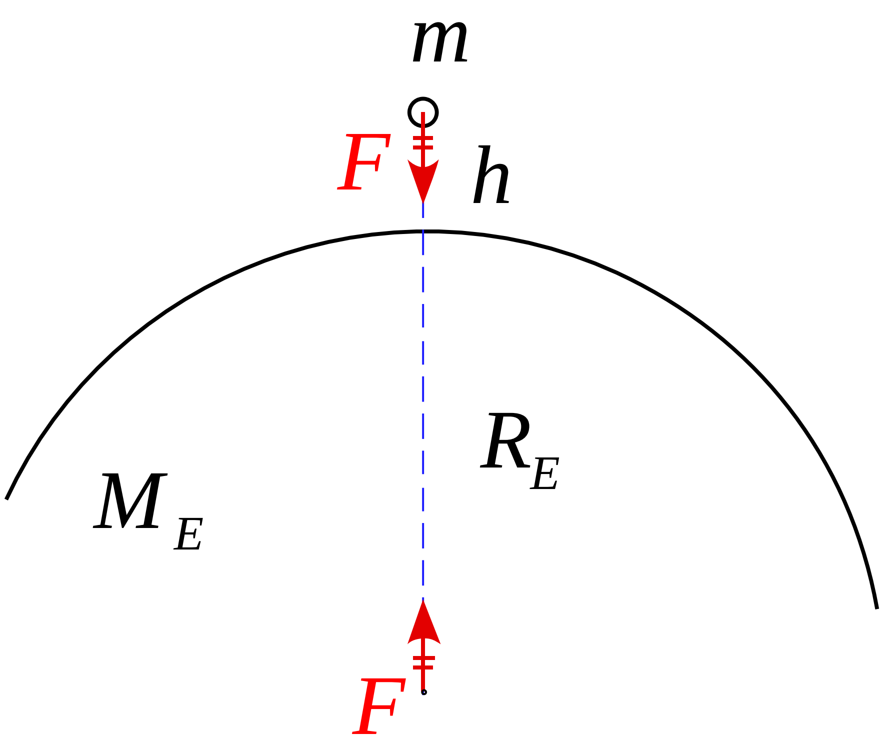
万有引力の法則～gの値

例題

以下の数値を用いて重力加速度 g の値を概算せよ。

$$R_E \approx 6.38\times10^{6}\ \mathrm{[m]} \quad M_E \approx 5.98\times10^{24}\,\mathrm{[kg]}$$

$$G = 6.673\times10^{-11}\,[\mathrm{Nm^2/kg^2}]$$



数値と有効数字

力学基礎演習 p7

最小桁にだけ誤差が含まれるとして記された数を“**有効数字**”という。また，整数部分が 0 でない一桁の数となるように 10 の累乗をかけて示された数を“**科学指数表示**”という。

例えば，0.00023652 を有効数字 3 桁で表すときには，連続する 0 を除いた左から 4 つ目の位の数を四捨五入し 0.000237 とする（科学指数表示では 2.37×10^{-4} とかける）。

有効数字は何桁になるか

(1) 12.345

(2) 12.3450

(3) 12.34×10^3

(4) 0.00012340

有効数字を考慮して計算せよ (電卓可)

(1) $6.362 + 21.4$

(2) $5.185 + 0.157 - 0.0386 + 17.49$

(3) 1.7182×3.14

(4) $9.87 \div 1.2$

ニュートンの運動の法則

第1法則（慣性の法則）
すべての物体は、外部から作用を受けない限りその運動の状態をそのまま維持する。静止しているものはそのまま静止をし続け、ある速度で運動しているものはそのままの速度を保持して直線上を等速運動し続ける。

第2法則（ $m\vec{a} = \vec{F}$ ）
物体に外から力が作用するとき、その物体の得る加速度の大きさは、加えた力の大きさに比例し、その方向は力の向きに一致する。

第3法則（作用・反作用の法則）
2つの物体の間に作用する力は、それらを結ぶ直線上に作用し、その大きさは等しく、方向は反対向きである。

慣性の法則

慣性：物体が常に現在の状態を保とうとする性質

ガリレイ以前の物理にはこのような考え方は無かった。

→さまざまな間違いを含んでいた

間違いの例

・軽いものはゆっくり落ちる　→空気の摩擦力のため

・何もしなければやがて物体は止まる　→床との摩擦力のため

運動状態が変化

これらの邪魔する力さえなければ、「現在の運動状態を保つ」
→物体は運動状態を変えることはない。

慣性の法則

物体に力が働かないか、働いていてもつり合っていれば

静止している物体：静止し続ける
運動している物体：等速度運動を続ける　$\vec{v}$が一定

力に着目する

運動方程式

物体に力が働かないか、
働いていてもつり合っている

慣性の法則が成立

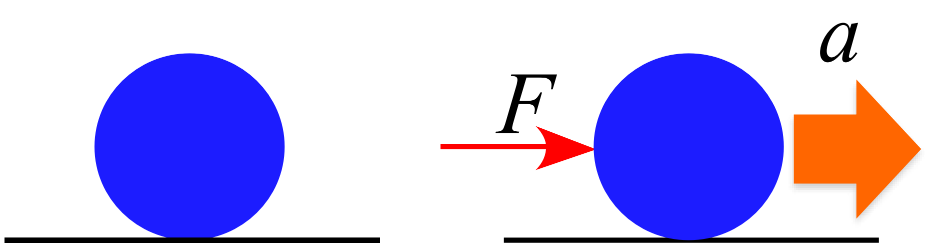
崩れる

運動状態が変化

最初：停止

$v(0) = 0$ → $v(t) = v$

速度を持つには、加速度が必要



大きな力が加われば、
大きな加速度が得られるはず

F は a に比例する

$$a \mu F$$

F は m に比例する

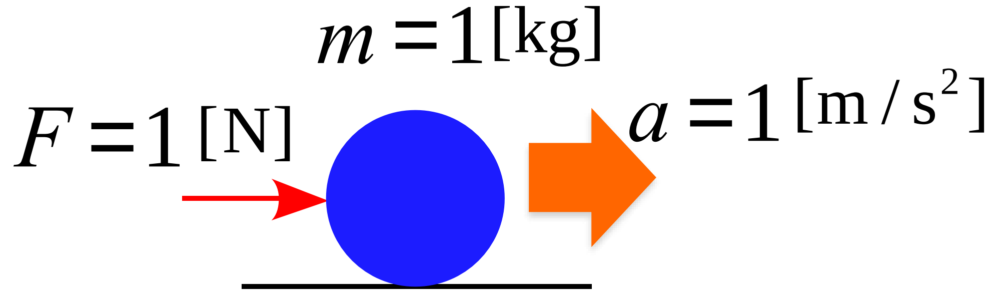
$$m \mu F$$

$$k \cdot ma = F$$

k は比例定数

定義

$m=1[\mathrm{kg}]$ の物体に
$a=1\,[\mathrm{m/s^2}]$ の加速度を
生じさせる力を $F=1[\mathrm{N}]$ とする



$$k\cdot ma = F \quad \xrightarrow{k=1} \quad ma = F$$

運動方程式

$$ma = f_1 + f_2 + f_3 + \cdots + f_n = F$$

力学＝ニュートン力学

運動方程式

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T^2]} = \frac{[ML]}{[T^2]}$$

$$ma = F$$

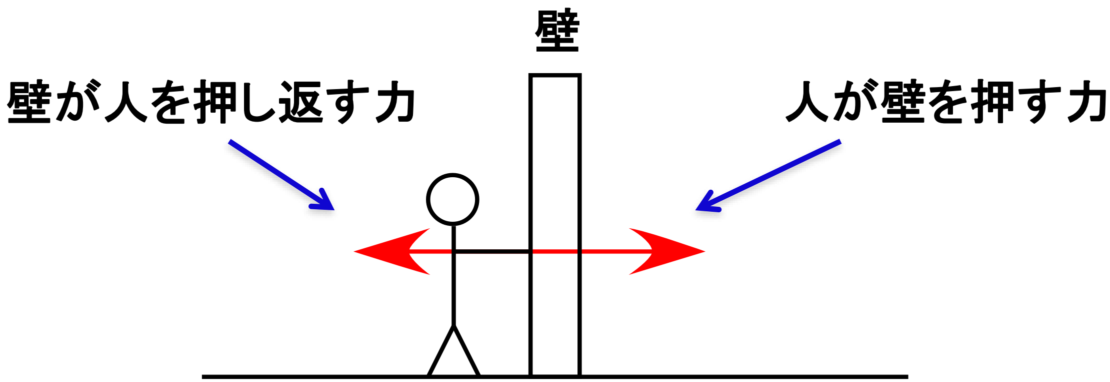
注意）

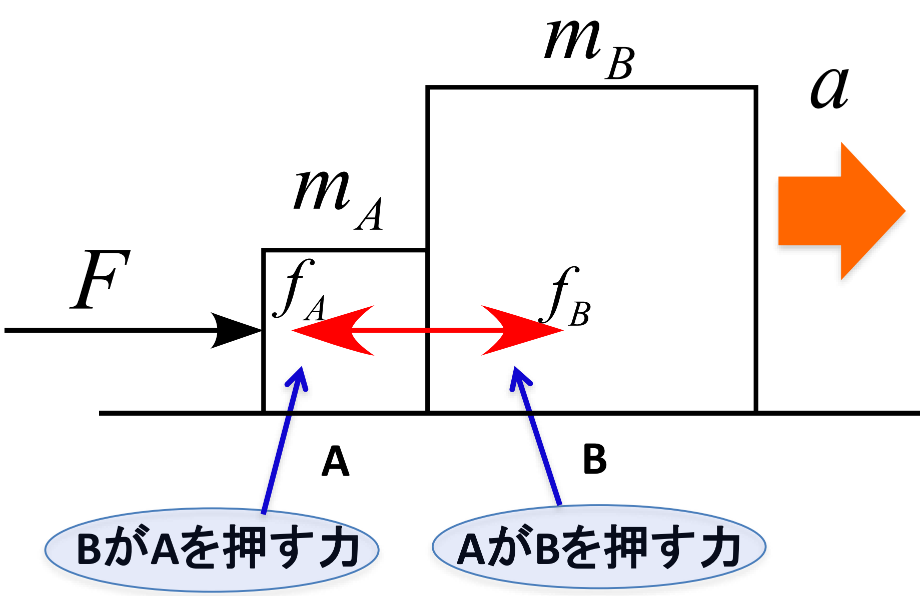
質量と重さの違い

質量：動きにくさの度合いを表した物理量
重さ：物体に働く重力　　　←重さは力

作用･反作用の法則

例

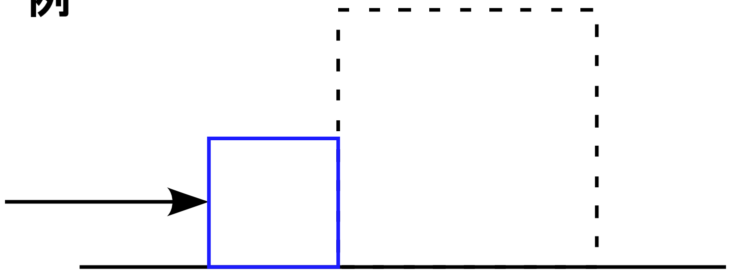




- 摩擦は無視
- 物体A、Bは一緒に右に運動

作用･反作用の法則

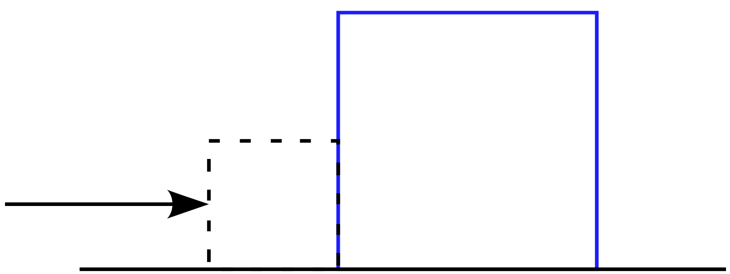
例



物体A、Bそれぞれの運動方程式

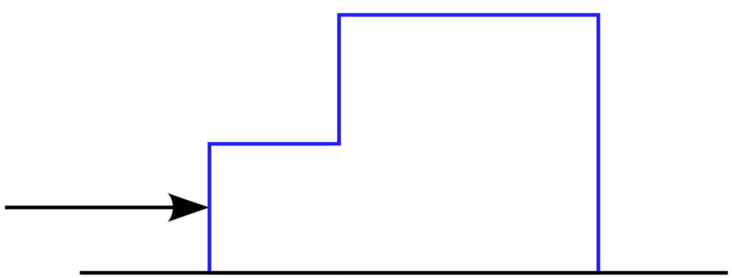
$$m_A a = F - f_A$$

$$m_B a = f_B$$



$$(m_A + m_B) a = F - f_A + f_B$$

接着剤で接着して、塊を押すと考えると



$$(m_A + m_B) a = F$$

同じ現象を表す式だから、数学的にも同じ式でなければならない

$$\boxed{F} = \boxed{F - f_A + f_B}$$

塊と見た　　AとB別々と見た

$$-f_A + f_B = 0$$

$$f_A = f_B$$

従って、f_A と f_B は、互いに逆向きで大きさが同じ

→作用・反作用の法則が成り立っている

力学基礎演習

4.3 運動の第三法則
問題7　29ページ
4.3.2 張力
問題9　29ページ

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

$$a = g$$

よって、物体の加速度は常に一定
自由落下は「等加速度運動」である。

「等加速度運動」の式を用いると

$$v = v_0 + at$$

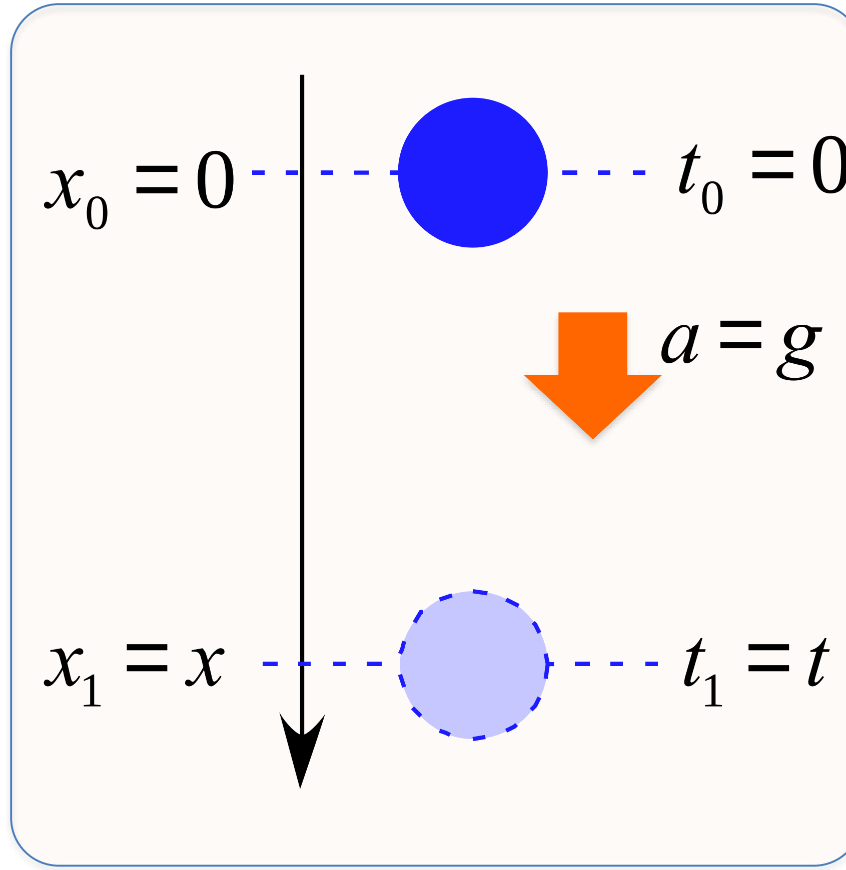
$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$v_0 = 0$$

$$a = g$$

$$v = 0 + gt = gt$$

$$x = 0 + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} g t^2$$



力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- 問題文で指定されている場合はそれを利用する
- 指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- 一般的には運動の進行方向を正に取ると良いことが多い
- 直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は
1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力
の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
$ma = F$ の F の部分を書き込む

力学の問題を考える手順

$$m\frac{dv}{dt}=F$$

$$\frac{dv}{dt}=\frac{F}{m}$$

$\Rightarrow$ $v=\bigcirc$ $\Rightarrow$ $x=\bigcirc$

t で積分　　t で積分

積分定数は初期条件が決める

運動方程式を立てる ⇒ 速度、変位を求める ⇒ 求めた速度、変位を使って問題で問われている量を計算する

力学基礎演習

4.2 運動の第二法則
問題3　23ページ
問題4　24ページ

自由落下

運動方程式は

$$ma = mg$$

この運動方程式を解くことで
速度と変位を導く。

$$a = \frac{dv}{dt}$$

を代入すると、運動方程式は

$$m\frac{dv}{dt} = mg$$

$$\frac{dv}{dt} = g$$

この式を t で積分すると

$$v = gt + C_1$$

初期条件より

$$v(0) = g \cdot 0 + C_1 = 0$$

$$C_1 = 0$$

従って

$$\boxed{v(t) = gt}$$

変位については

$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = gt$$

この式を t で積分すると

$$x = \frac{1}{2}gt^2 + C_2$$

初期条件より

$$x(0) = \frac{1}{2}g \cdot 0^2 + C_2 = 0$$

$$C_2 = 0$$

従って

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}gt^2}$$

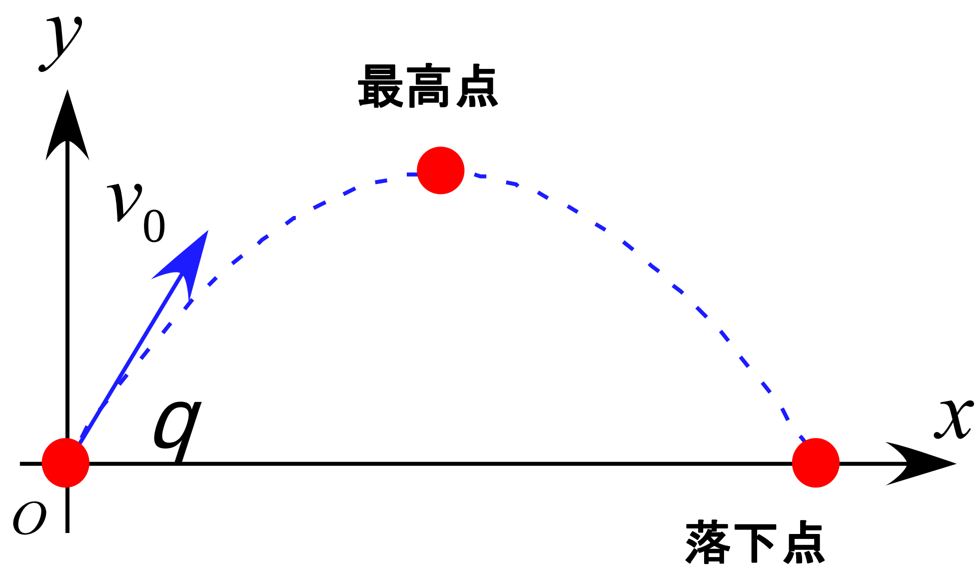
斜方投射運動(放物運動)

斜めに物体を投げ上げたときの運動

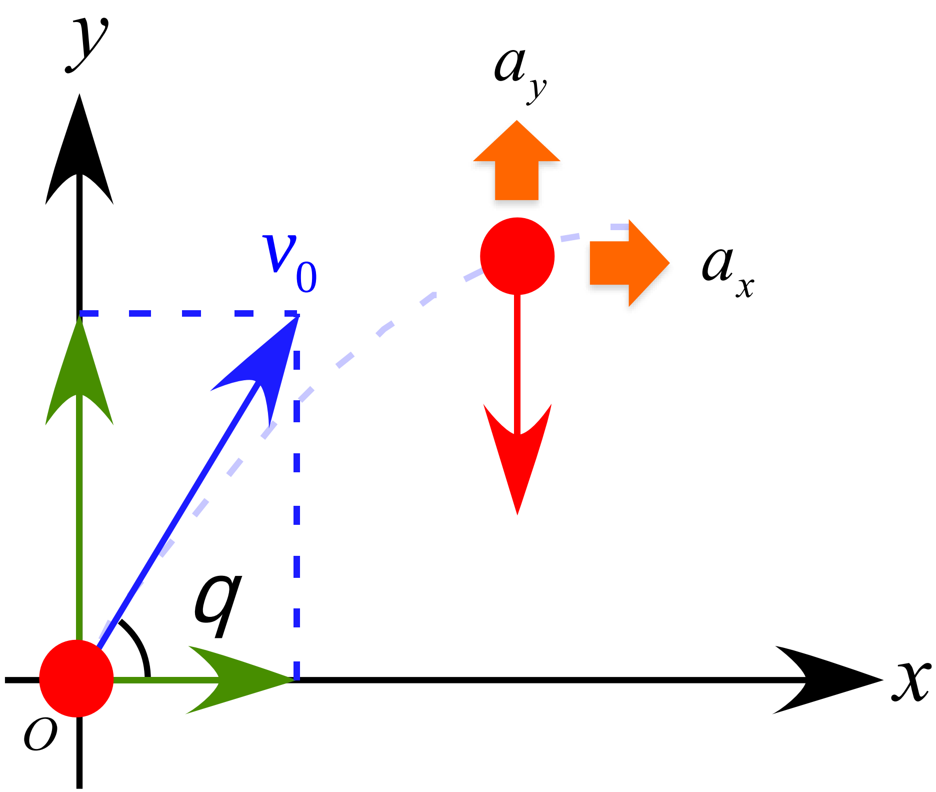
初速度：v_0

水平面との角度：q

任意の時刻における物体の
速度、位置について考える



2次元の運動 →(分解) 1次元の運動



それぞれの軸について
運動方程式を考えると

x 方向

$$ma_x = 0$$

y 方向

$$ma_y = -mg$$

それぞれの加速度は

$$a_x = 0$$

等速直線運動

$$a_y = - g$$

加速度 $- g$

等加速度運動

この2式を t で積分する。

x 方向

$$\frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$v_x = C_{x1}$$

初期条件 $t = 0$ のとき

$$v_{x0} = v_0 \cos q$$

であるから、積分定数は

$$v_x(0) = C_{x1} = v_0 \cos q$$

$$C_{x1} = v_0 \cos q$$

従って、速度 v_x は

$$v_x = v_0 \cos \theta$$

y 方向

$$\frac{dv_y}{dt} = -g$$

$$v_y = - gt + C_{y1}$$

初期条件 $t=0$ のとき

$$v_{y0} = v_0 \sin q$$

であるから、積分定数は

$$v_y(0) = -g \cdot 0 + C_{y1} = v_0 \sin\theta$$

$$C_{y1} = v_0 \sin q$$

従って、速度 v_y は

$$v_y = -gt + v_0 \sin\theta$$

それぞれの速度は

$$\boxed{\begin{aligned} v_x(t) &= v_0 \cos\theta \\ v_y(t) &= -gt + v_0 \sin\theta \end{aligned}}$$

ここで、さらに速度の式をそれぞれ
t で積分する

x 方向

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \cos\theta$$

$$x = (v_0 \cos q)t + C_{x2}$$

初期条件 $t=0$ のとき原点なので

$$x(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$x(0) = (v_0 \cos q)\times 0 + C_{x2} = 0$$

$$C_{x2} = 0$$

従って

$$x(t) = (v_0 \cos q)t$$

y 方向

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -gt + v_0 \sin\theta$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\theta)t + C_{y2}$$

初期条件 $t=0$ のとき原点なので

$$y(0) = 0$$

であるから、積分定数は

$$y(0) = -\frac{1}{2}g \cdot 0^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \cdot 0 + C_{y2} = 0$$

$$C_{y2} = 0$$

従って

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right)t$$

任意の時刻における変位は

$$x(t) = \left(v_0 \cos q\right)t$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}g \cdot t^2 + \left(v_0 \sin\theta\right)t$$

放物運動の確認

時刻 t を求めると

$$t = \frac{x}{v_0 \cos q}$$

これを y に代入すると

$$y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\theta} \right)^2 + v_0 \sin\theta \frac{x}{v_0 \cos\theta}$$

$$= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x^2 + (\tan\theta) x$$

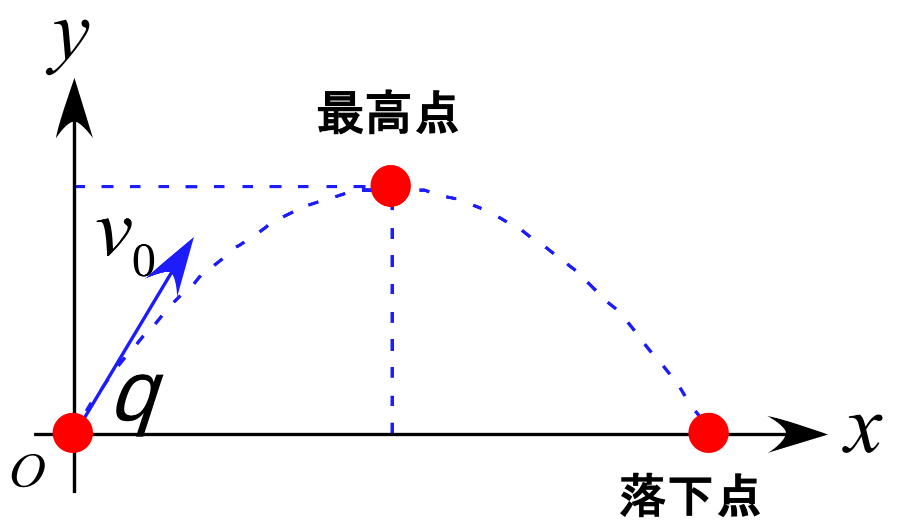
放物線

$$= \left[-\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} x + \tan\theta \right] x$$

$y=0$ とすると

$$x=0$$

$$x=\frac{2v_0^2\sin q\cos q}{g}$$



の2点となり、それぞれ原点と落下点となる。

放物運動の確認

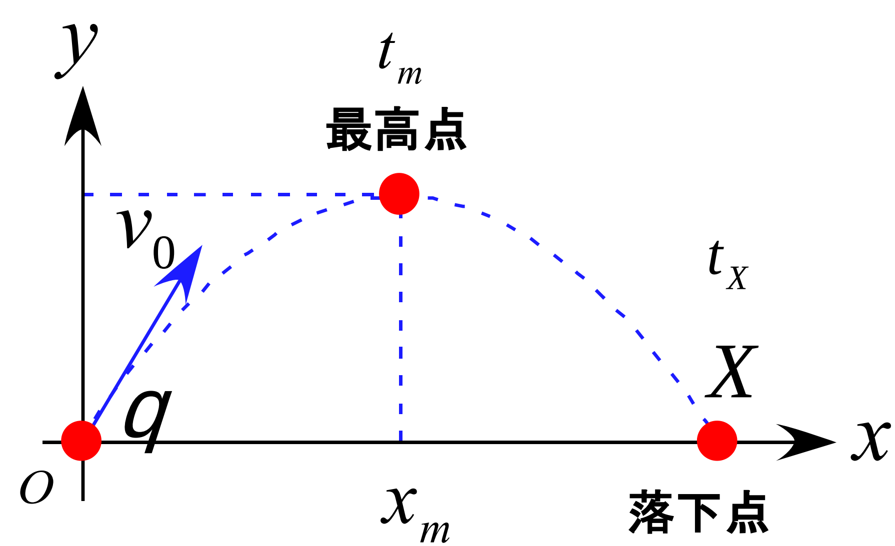
落下点の達した時刻 t_X は

$$t_X = \frac{x}{v_0 \cos\theta} = \frac{1}{v_0 \cos\theta}\,\frac{2v^2{}_0 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$= \frac{2v_0 \sin q}{g}$$

対称性より最高点の時刻 t_m は

$$t_m = \frac{t}{2} = \frac{v_0 \sin q}{g}$$



このときの座標は

$$x_m = \frac{X}{2} = \frac{v_0^2 \sin\theta \cos\theta}{g}$$

$$y(t_m) = -\frac{1}{2} g \cdot t_m{}^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) t_m$$

$$= -\frac{1}{2} g \cdot \left(\frac{v_0 \sin\theta}{g}\right)^2 + \left(v_0 \sin\theta\right) \frac{v_0 \sin\theta}{g}$$

$$= \frac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g}$$

放物運動～飛距離最大

飛距離最大となる初速度の角度 q_0 を考える

$$\sin 2q = 2\sin q\cos q$$

$$x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin q_0 \cos q_0}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2q_0}{g}$$

これが最大値になるのは $\sin 2q_0$ が最大値になるときで、その最大値は 1 である。

このとき、

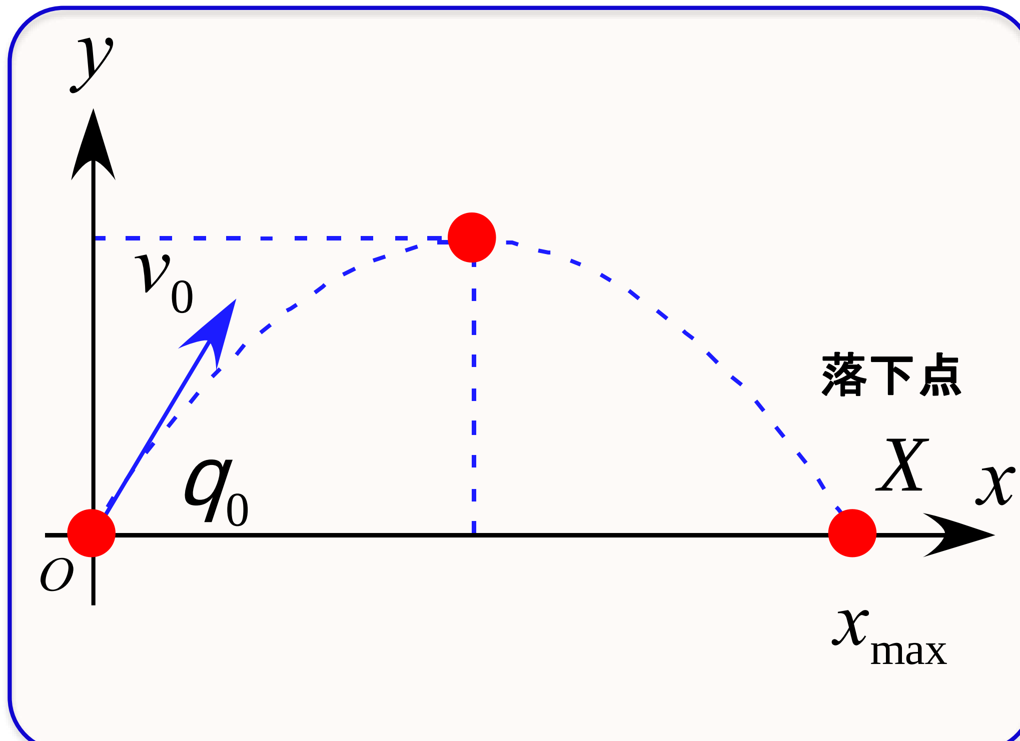
$$2q_0 = 90^\circ$$

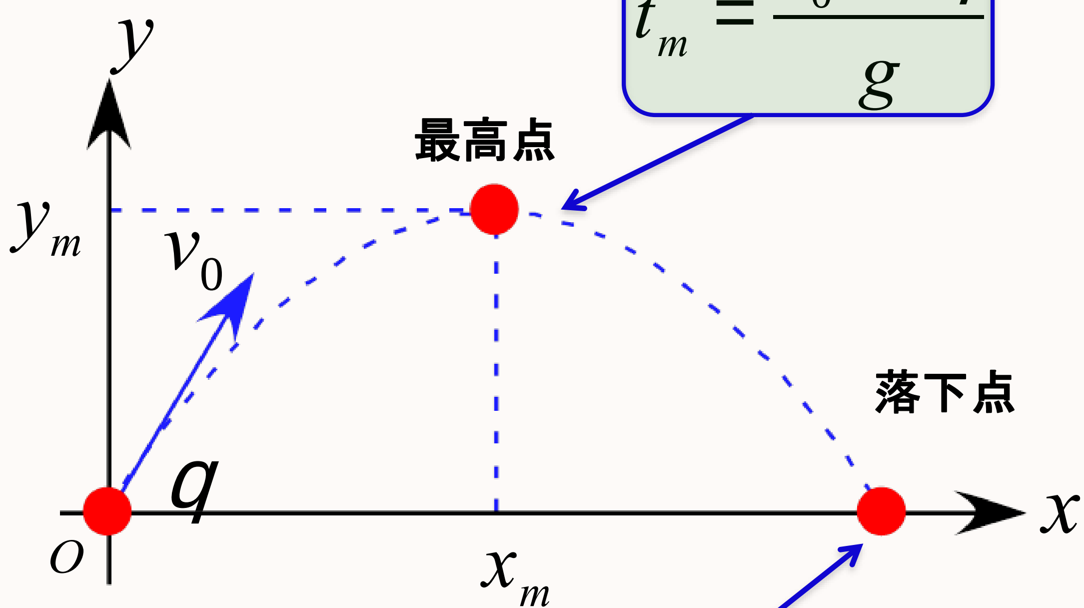
となるので $x_{\max}$ となる放出角度は

$$q_0 = 45^\circ$$

$$x_{\max} = \frac{v_0^2}{g}$$

である。





$$t_m = \frac{v_0 \sin q}{g}$$

$$x = \frac{2v_0^2 \sin q \cos q}{g}$$

$$t = \frac{2v_0 \sin q}{g}$$