

講義ノート

2019年度
物理学基礎
補充授業

2019 補充授業

まず、高校で物理を履修した人は、高校の時に覚えたであろう公式を一旦捨てる。

物理は自然現象を数式で表す

～しかもできるだけ少ない式で表したい

高校物理の段階では
数学の準備が足りないので
本質を伴わない変な公式が多い

例えば

力学

$$ma = F$$

運動方程式

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

ニュートンが
最初に提唱した形

電磁気学

$$\int_s \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV$$

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_s \left(\vec{i} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

Maxwellの方程式

そもそも、君たちは勘違いをしている。

答えを覚えて、テストで書くだけはナンセンス、意味がない。

まず、何か式を書いたら

例えば

$$ma = F \quad \text{とか}$$

$$ma = -mg \quad \text{とか}$$

式を書いた時に、何でそう書けるのか？ 自問自答する

- ・それぞれの項が何を意味しているか？
- ・= (イコール) はなぜ結べるのか？

式は自然界を表す表現の一つであるから意味がある
大切なことはその**式の意味を理解する**。

数学(微積・ベクトル) は道具にすぎない

道具が使えなければ困るが、道具にこだわりすぎるのも良くない

物理は公式がいっぱい？

物理において、所謂「公式」と呼ばれるものは

- ・定義式 …… 先人達が決めた物理を理解する上で役に立つルール
- ・物理法則 …… 物理学の中で提唱されている法則
観測や理論から導き出された自然界の法則

に分けられます。

例えば

定義式

$$v = \frac{dx}{dt}$$

速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

加速度

$$\mu = \frac{f_s}{N}$$

摩擦係数

法則

$$ma = F$$

運動方程式

$$f_g = mg$$

重力

$$f_i = -m\alpha$$

慣性力

$$f_r = kx$$

フックの法則

力学

・高校の時に覚えた公式は一旦忘れる。

場合分けされた公式は
覚えると害が出る

新しく使える道具

速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

(定義式)

力学＝運動を表す



力が作用

$$ma = F \quad (\text{運動方程式})$$

(ニュートンが見つけた法則)

自由落下
鉛直投げ上げ
水平投射
斜方投射
斜面を滑る
・・・などなど

次元解析

[L]と[M]と[T]

長さ

質量

時間

を使って、それぞれの物理量を表すこと

- ・その物理量の構成がわかる
- ・その物理量の単位がわかる

変位～速度～加速度

変位
 x

t で
微分



速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

t で
微分

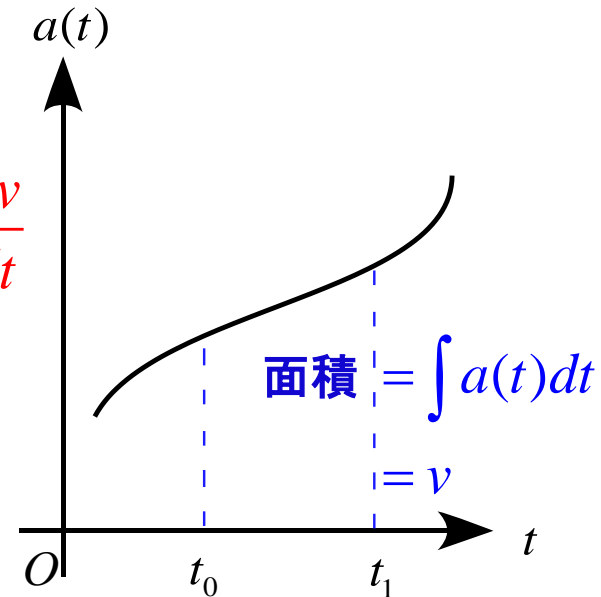
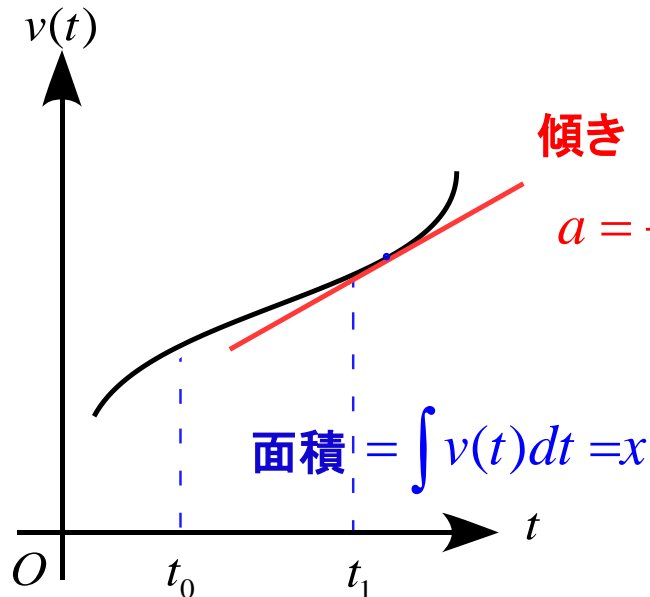
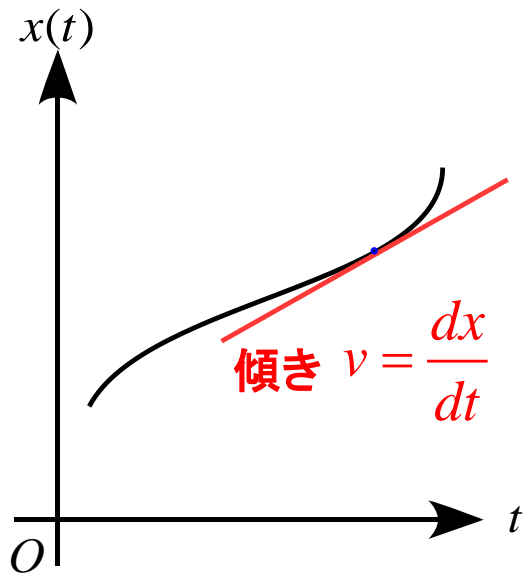


加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

積分

積分



運動方程式は万能だ！

$$ma = F$$

質量と加速度をかけたものが
その物体に作用する力の合計である

$$ma = F \iff m \frac{dv}{dt} = F$$

両辺に速度 $v = \frac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv \frac{dv}{dt} = F \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) = \frac{d}{dt} (Fx)$$

運動エネルギー

仕事

次元解析

| | | |
|-------|---------------------|----------------------|
| $[M]$ | $\frac{[L]}{[T^2]}$ | $\frac{[ML]}{[T^2]}$ |
| 質量 | 加速度 | 力 |

この式変形は、「知っている」で
使って良いが、間違っていないか
確認をすること

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right)' &= \frac{1}{2} m \cdot 2v \cdot v' \\ &= m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt} \end{aligned}$$

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

運動量

ニュートンが最初に
提唱した形

次元解析

$$\begin{array}{|c|} \hline [M] \\ \hline \text{質量} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline [L] \\ \hline \text{速度} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline [ML] \\ \hline [T] \\ \hline \text{運動量} \\ \hline \end{array}$$

式の意味

運動量の時間変化 = 作用する力

- ・運動量が変化すれば、力が作用したはずである。
- ・力が作用すれば、運動量が増える。

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

力積

次元解析

$$\begin{array}{|c|} \hline \frac{ML}{T^2} \\ \hline \text{力} \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|} \hline [T] \\ \hline \text{時間} \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline [ML] \\ \hline [T] \\ \hline \text{力積} \\ \hline \end{array}$$

1. (期末)

運動方程式 $ma = F$

$$m \frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = \frac{dm}{dt}v + m \frac{dv}{dt}$$

質量一定: $\frac{dm}{dt} = 0$

両辺を x で積分する

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int F dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int F dx$$

$$\int \left(m \frac{dv}{dt} v \right) dt = \int F dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int F dx$$

運動エネルギー

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$dx = v dt$$

() の中に m を入れる

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = F dt$$

運動量

1. (期末)

運動方程式

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

ベクトル表記

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

両辺に左側から \vec{r} の外積をする

$$\vec{r} \times m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



この式変形ができる理由



$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

 \vec{L} \vec{N}

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$



回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

 \vec{L} : 角運動量 \vec{N} : 力のモーメント

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) &= \frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \\ &= \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v}) \end{aligned}$$

同じベクトルの
外積はゼロ

$$= \vec{r} \times \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

力学のモデルの考え方

運動方程式を立てる



$$m \frac{dv}{dt} = F$$

速度、変位を求める



$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

加速度



$$v = \text{○}$$

速度



$$x = \text{○}$$

変位

t で積分

t で積分

積分定数は初期条件が決める

求めた速度、変位を使って
問題で問われている量を計算する

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad W = Fx$$

$$U = mgx$$

など

運動方程式を立てる手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- ・問題文で指定されている場合はそれを利用する
- ・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- ・一般的には運動の進行方向を正にとると良いことが多い
- ・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は

1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力

の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら
 $ma = F$ の F の部分を書き込む

運動方程式から導かれる関係

$$\text{運動方程式 } ma = F$$

x で積分

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

仕事とエネルギーの関係

左側から \vec{r} で外積

t で積分

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量

モーメント

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける



$$m \frac{dv}{dt} = F$$



$$v = \text{○}$$



$$x = \text{○}$$

解くことが困難



どの物理量の関係が必要か検討する

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

t で積分

x で積分

左側から \vec{r} で外積

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{x_1}^{x_2} F dx$$

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

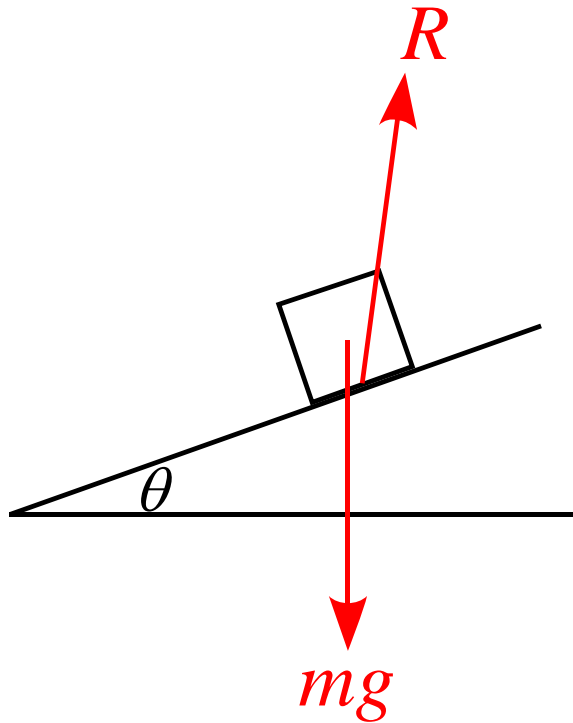
回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int \vec{F} dt$$

斜面を滑る物体の作図について



物体に作用する力は

重力: mg

接触面から受ける抗力 : R

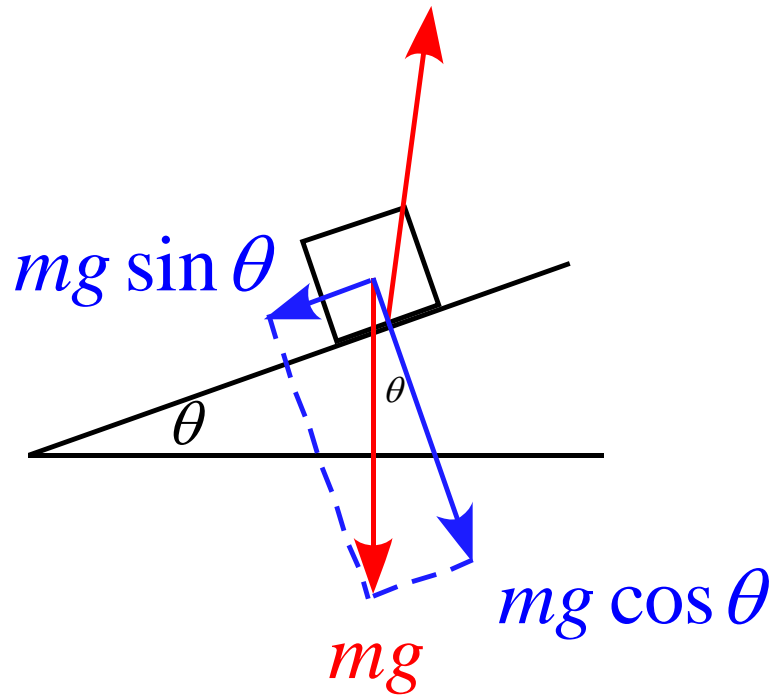
の2つとなります。

このままの状態では考え難いので、

斜面に水平な方向
斜面に垂直な方向

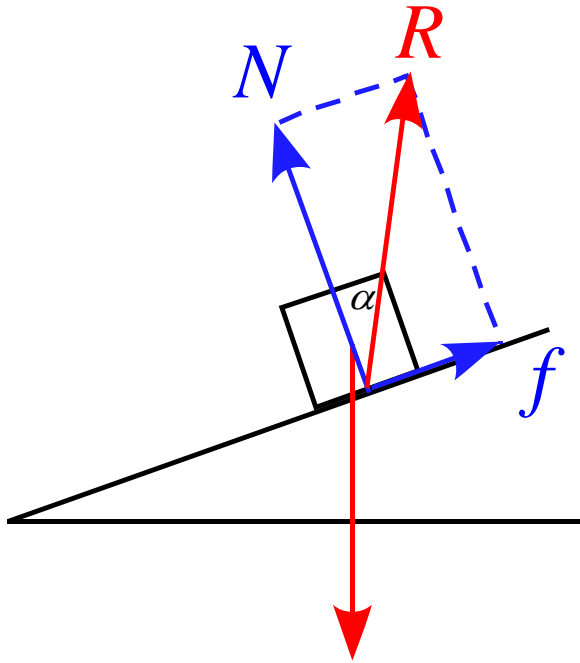
の2つの軸を取ります

重力 mg を軸に沿って分解すると



斜面の角度 θ から
 mg を分解します

抗力 R を軸に沿って分解すると

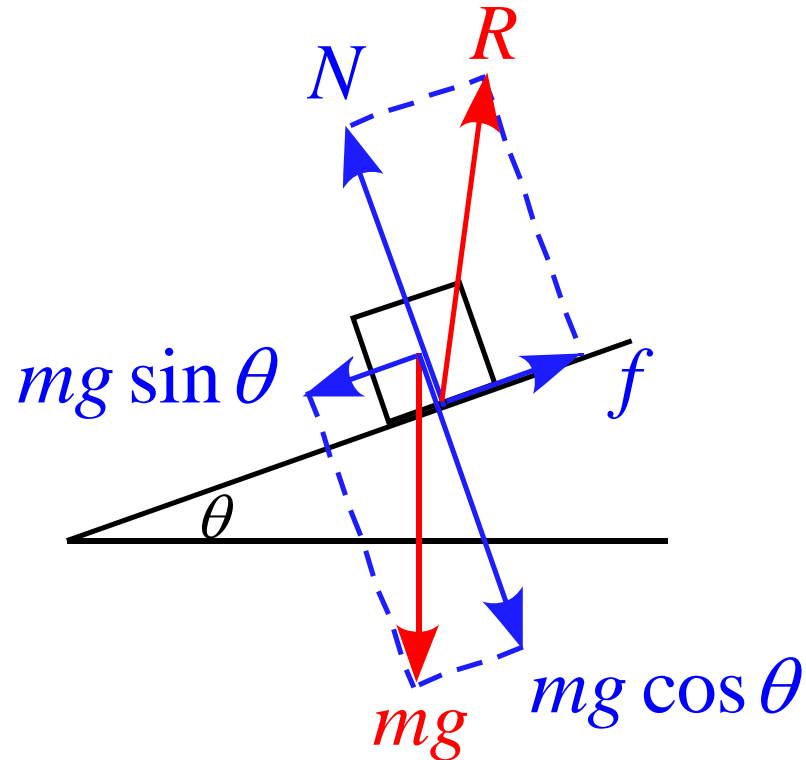


接触面から受ける抗力は

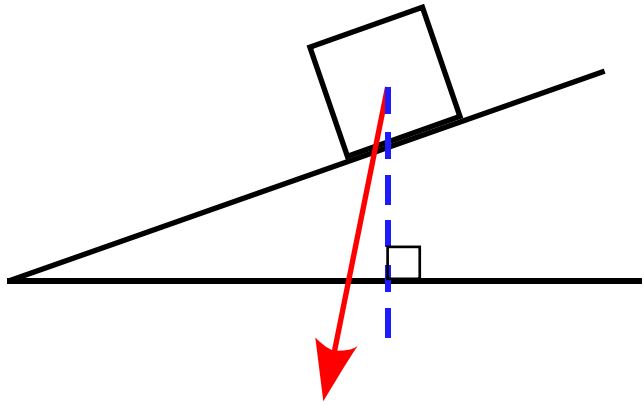
面に垂直な成分: N

面に平行な成分: f

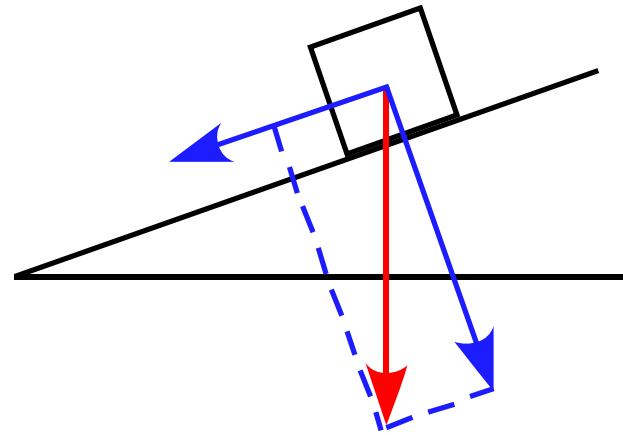
の2つとなります。



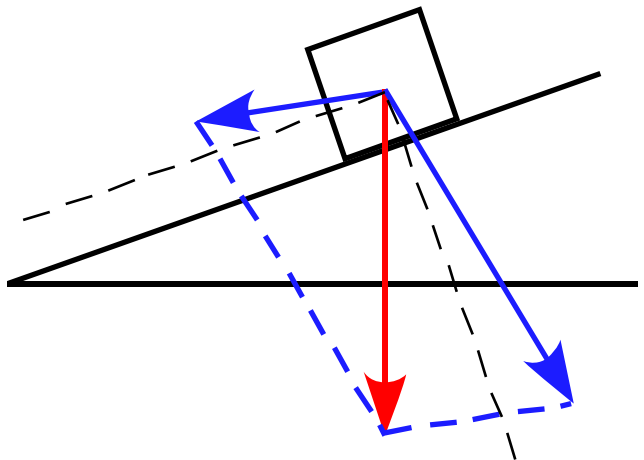
間違った答案例



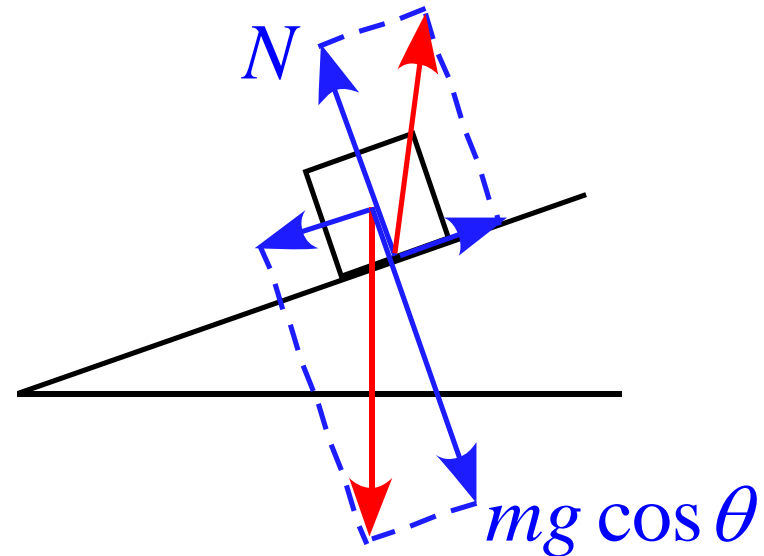
- × 重力が真下からずれている



- × 分解した成分が長方形からはみ出ている



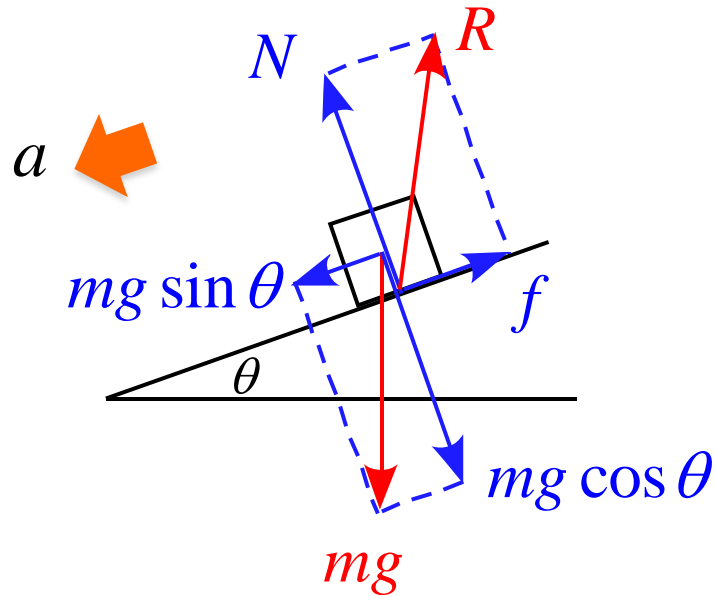
- × 長方形ではなくて平行四辺形になっている
分解した成分が軸に沿っていない



- × 垂直抗力 N と $mg \cos \theta$ の
矢印の長さが明らかに違う

2. (2), 8. 斜면을滑り降りる物体 (期末)

・作図は丁寧に！



1. 図に作用する力を書き込む
2. 軸の設定を確認する

運動の方向に合わせたほうが都合が良い

斜面に平行に
斜面に垂直に

軸と違う方向を向いている力は
分解して軸にそろえる

3. 初期条件を書き出す

何はともあれ、運動方程式

$$ma = F$$

軸ごとに運動方程式を立てる

$$ma_x = mg \sin q - f$$

$$ma_y = N - mg \cos q$$

注) 向き、正負が重要！

次にそれぞれの条件を適用する

$$f = m_k N \quad \rightarrow \quad ma_x = mg \sin \theta - m_k N$$

斜面から飛び出ない $\rightarrow a_y = 0$

$$m \cdot 0 = N - mg \cos \theta$$


$$N = mg \cos \theta$$

$$ma_x = mg \sin \theta - m_k mg \cos \theta$$

問題文で使用されている文字に合わせると

$$ma = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$$

となる

等加速度運動を示す  $a =$   これが時間に依らないことを示せばよい

$$a = g \sin \theta - \mu_k g \cos \theta$$

g, m_k, g は定数なので a は時間に依らず一定である。
従って、この運動は等加速度運動である。

摩擦力がした仕事

運動方程式を見ると

$$ma = mg \sin \theta - \underbrace{\mu_k mg \cos \theta}_{\text{摩擦}}$$

両辺を x で積分すると

仕事とエネルギーの関係

が導かれる。

従って、

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta$$

$$\int m \frac{dv}{dt} dx = \int (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) dx$$

$$\int m \frac{dv}{dt} v dt = \int (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) dx$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv^2 \right) dt = \int (mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) dx$$

ここで、 $t = 0, x = 0, v = v_0$ から $t = t_1, x = L, v = v$ まで動いたとすると

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = \underbrace{(mg \sin \theta - \mu_k mg \cos \theta) L}_{\text{摩擦による仕事}}$$

摩擦による仕事

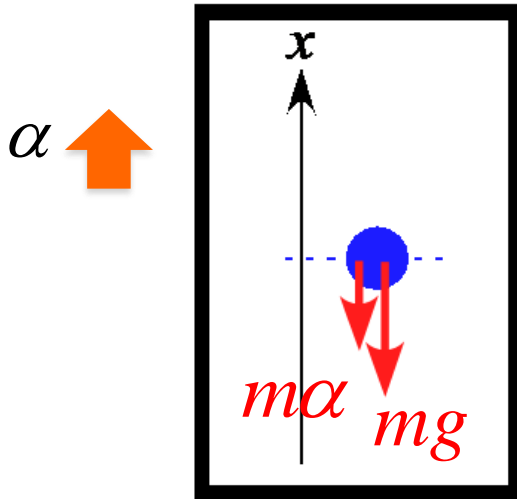
従って、摩擦がした仕事は

$$W_{\text{摩}} = -\mu_k mg \cos \theta \cdot L$$

となる。

2. (1) エレベータ内 (期末)

上昇



何はともあれ、運動方程式

$$ma = F$$

1. とりあえず左辺に ma と書く
2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg - m\alpha$$

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

- ・場の力・・・ mg
- ・接触力・・・ 無し
- ・慣性力・・・ $m\alpha$

慣性力は進行方向と逆向きに

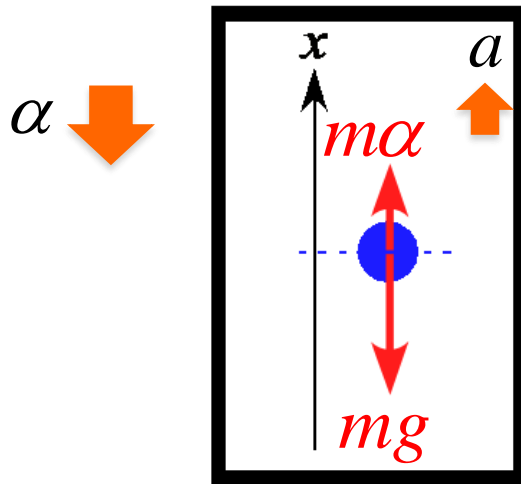
| | | |
|----------------------|---|--|
| 運動する物体 の質量 m | × | (エレベータ) 動いている座標 の加速度 α |
|----------------------|---|--|

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (上向き正)

注) 向き、正負が重要！

下降



何はともあれ、運動方程式

$$ma = F$$

1. とりあえず左辺に ma と書く
2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg + m\alpha$$

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

- ・場の力・・・ mg
- ・接触力・・・ 無し
- ・慣性力・・・ $m\alpha$

慣性力は進行方向と逆向きに

(エレベータ)

運動する物体
の質量

×

動いている座標
の加速度

m

α

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている(上向き正)

注) 向き、正負が重要！

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場のカ... mg

・接触カ... 床面からの抗カ $N(R)$

・慣性カ... $m\alpha$

慣性カは進行方向と逆向きに

(エレベータ)

運動する物体
の質量

動いている座標
の加速度

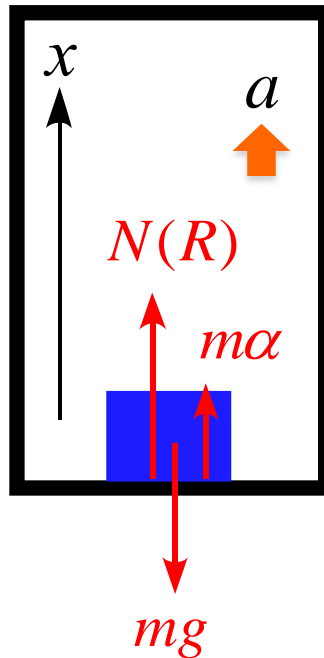
m

α

2. 軸の設定を確認する

問題で設定無し (上向き正)

下降
 α



何はともあれ、運動方程式

$$ma = F$$

1. とりあえず左辺に ma と書く


2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg + N + m\alpha$$

注) 向き、正負が重要！

運動方程式

$$ma = -mg + N + m\alpha$$

床から離れない  $a = 0$

$$0 = -mg + N + m\alpha$$

$$N = m(g - \alpha)$$

無重量となる境界は $N = 0$ となるとき

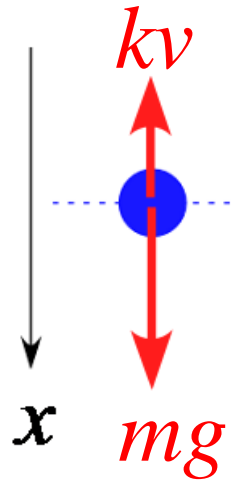
$$N = m(g - \alpha) = 0$$

従って、エレベータの加速度は

$$\alpha = g$$

が必要である

7. 雨滴の落下 (期末)



何はともあれ、運動方程式

$$ma = F$$

1. とりあえず左辺に ma と書く
2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = mg - kv$$

注) 向き、正負が重要!

この式から $v(t), x(t)$ を求めることになる

・作図は丁寧に!

1. 図に作用する力を書き込む

- ・場の力 $\dots mg$
- ・接触力 $\dots kv$ (空気抵抗)
- ・慣性力 \dots 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (下向き正)

式変形すると

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$$

(この微分方程式の解き方は数学の授業で)

この微分方程式を解くと

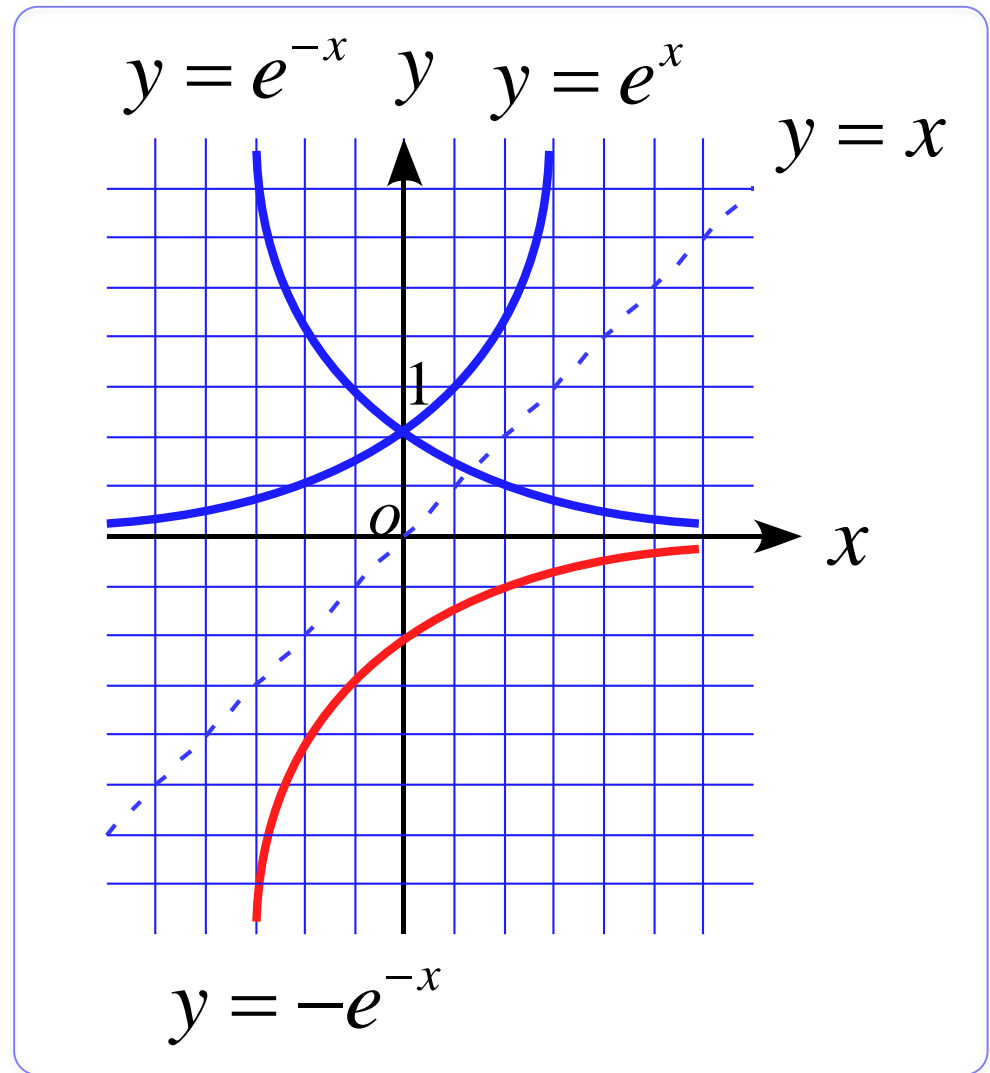
$$v(t) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m}t} \right)$$

この式を見てみると

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m}t}$$

ざっくりみると $-\frac{1}{e^t}$ のグラフ

であることがわかる



$t = 0$ のとき

$$v(0) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} \right) = \frac{mg}{k} (1 - 1) = 0$$

$t = \infty$ のとき

$$v(\infty) = \frac{mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot \infty} \right) = \frac{mg}{k} (1 - 0) = \frac{mg}{k}$$

$t = 0$ のときの傾きは

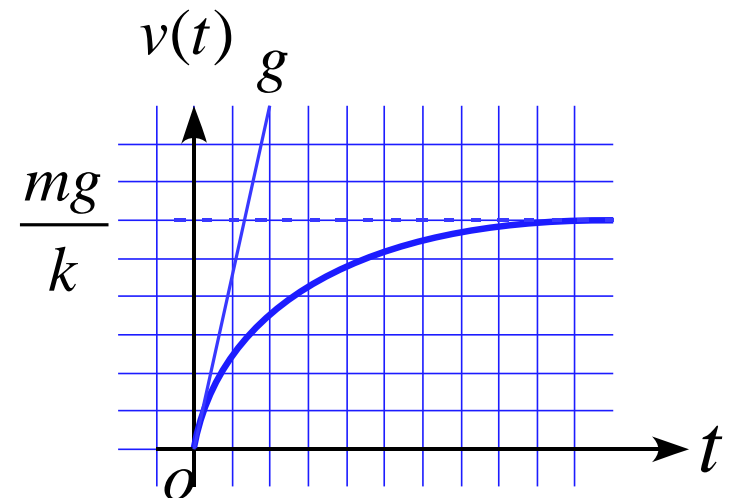
$$\frac{d}{dt} v(t) = \frac{d}{dt} \left[\frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} e^{-\frac{k}{m} t} \right]$$

$$= -\frac{mg}{k} \left(-\frac{k}{m} \right) e^{-\frac{k}{m} t}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v(0) &= -\frac{mg}{k} \left(-\frac{k}{m} \right) e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} = -\frac{mg}{k} \left(-\frac{k}{m} \right) \cdot 1 \\ &= g \end{aligned}$$

グラフを書く時のpoint

- ・ 始点 $t = 0$
- ・ 終点 $t = \infty$
- ・ 概形
- ・ 特殊な点



3., 9. 力のモーメント (期末)

回転の運動方程式

$$\frac{d}{dt} \underbrace{(\vec{r} \times m\vec{v})}_{\vec{L}} = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{N}}$$

力のモーメントは

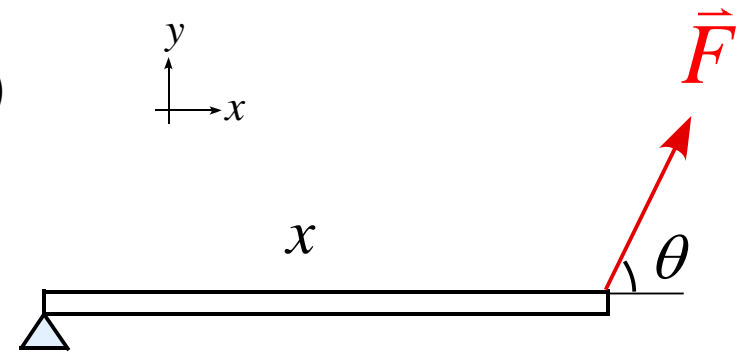
$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$$

で求めることができる

ベクトルの外積

$$\vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y F_z - r_z F_y \\ r_z F_x - r_x F_z \\ r_x F_y - r_y F_x \end{pmatrix}$$

(1)



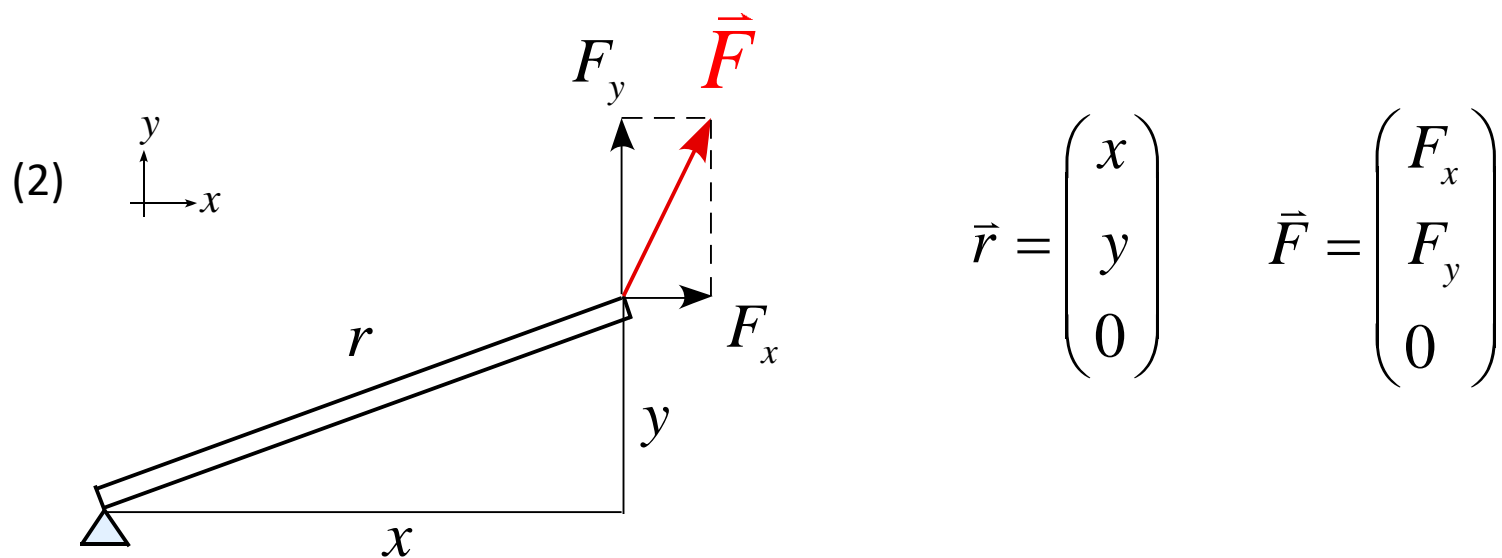
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F \cos \theta \\ F \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix}$$

2つのベクトルの外積は

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F \cos \theta \\ F \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot F \sin \theta \\ 0 \cdot F \cos \theta - x \cdot 0 \\ x \cdot F \sin \theta - 0 \cdot F \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF \sin \theta \end{pmatrix}$$

このベクトルの大きさは

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + (xF \sin \theta)^2} \\ &= xF \sin \theta \end{aligned}$$



2つのベクトルの外積は

$$\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot F_y \\ 0 \cdot F_x - x \cdot 0 \\ x \cdot F_y - y \cdot F_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xF_y - yF_x \end{pmatrix}$$

このベクトルの大きさは

$$\begin{aligned} |\vec{N}| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + (xF_y - yF_x)^2} \\ &= xF_y - yF_x \end{aligned}$$

棒が回転しない条件

回転の運動方程式

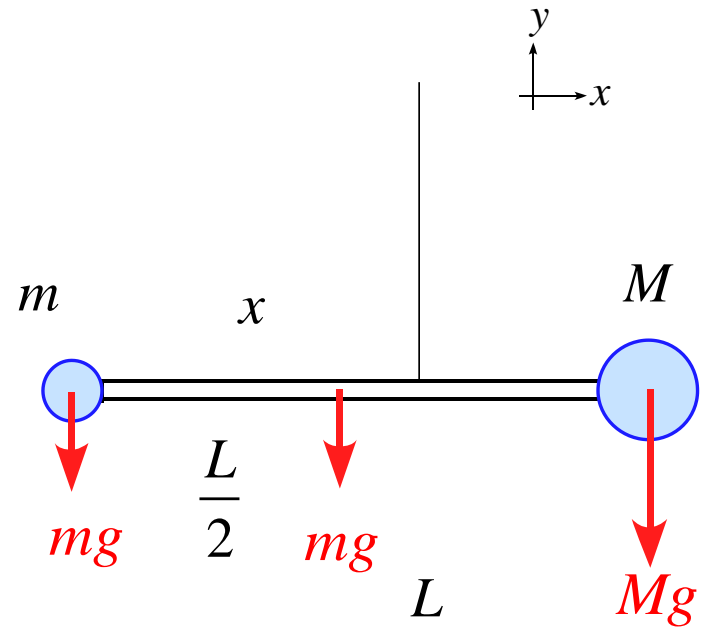
$$\frac{d}{dt} (\underbrace{\vec{r} \times m\vec{v}}_{\vec{L}}) = \underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\vec{N}}$$

力のモーメントと角運動量の関係を導く

左側の物体について

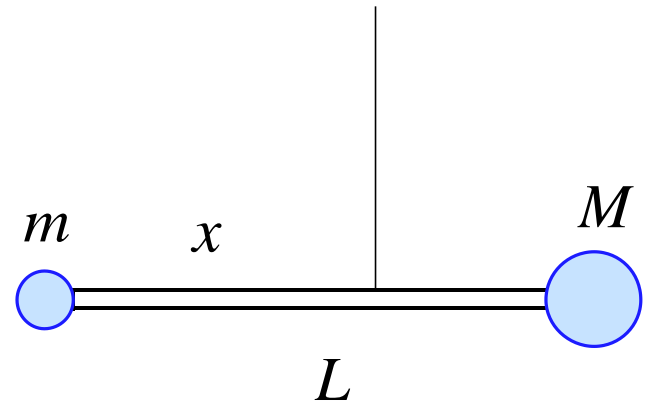
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_1 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-mg) \\ 0 \cdot 0 - (-x) \cdot 0 \\ -x \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix}$$



右側の物体について

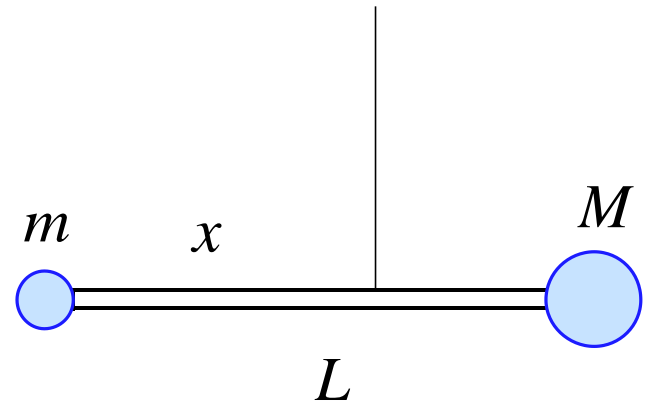
$$\vec{r} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix}$$



$$\vec{N}_2 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} L-x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-Mg) \\ 0 \cdot 0 - (L-x) \cdot 0 \\ (L-x) \cdot (-Mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix}$$

棒について

棒の質量を考える \rightarrow 棒の重心で力を表す



$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -\left(x - \frac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{N}_3 = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} -\left(x - \frac{L}{2}\right) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-mg) \\ 0 \cdot 0 - \left(-\left(x - \frac{L}{2}\right)\right) \cdot 0 \\ -\left(x - \frac{L}{2}\right) \cdot (-mg) - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}$$

従って、回転の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{N}_3 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -(L-x)Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix} \end{aligned}$$

成分で表示すると

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{dL_x}{dt} \\ \frac{dL_y}{dt} \\ \frac{dL_z}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xmg - (L-x)Mg + \left(x - \frac{L}{2}\right)mg \end{pmatrix}$$

角運動量の時間変化が $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ であれば棒は回転しない
即ち、

$$\frac{dL_z}{dt} = xmg - (L-x)Mg + \left(x - \frac{L}{2}\right)mg = 0$$

であればよい

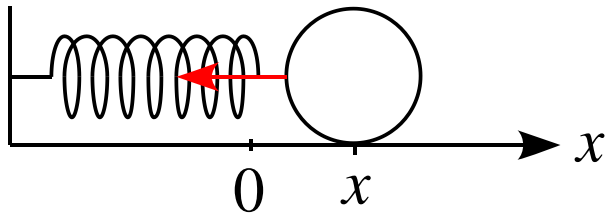
$$xmg - LMg + xMg + xmg - \frac{L}{2}mg = 0$$

$$(2m + M)x = LM + \frac{L}{2}m$$

$$x = \frac{2M + m}{2(2m + M)}L$$

となる

4., 5. 単振動 (期末)



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

微分方程式
を解くと

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta), \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Aと δ は初期条件が決める

となる。

ω について

$$v = \frac{dx}{dt} = A\omega \cos(\omega t + \delta)$$

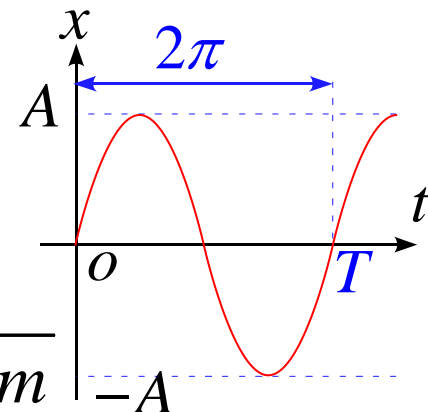
$$a = \frac{d^2 x}{dt^2} = -A\omega^2 \sin(\omega t + \delta)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} A \sin(\omega t + \delta)$$

周期 T について

$$\omega T = 2\pi$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$



初期条件から単振動の式を計算する

$$(1) \quad x(0) = 0, v(0) = v_0$$

$$(2) \quad x(t_1) = x_0, v(t_1) = 0$$

単振動の一般解の式に初期条件を代入し

$$A, \phi \quad \text{or} \quad \alpha, \beta$$

を求める

$$(1) \quad x(0) = A \sin(\omega \cdot 0 + \phi) = 0$$

$$\sin \phi = 0$$

$$\phi = 0$$

$$v(0) = A\omega \cos(\omega \cdot 0 + 0) = v_0$$

$$A\omega = v_0$$

$$A = \frac{v_0}{\omega}$$

単振動の一般解

$$\begin{aligned} x(t) &= A \sin(\omega t + \phi) \\ &= \alpha \sin \omega t + \beta \cos \omega t \end{aligned}$$



$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$\begin{aligned} v(t) &= \omega A \cos(\omega t + \phi) \\ &= \omega \alpha \cos \omega t - \omega \beta \sin \omega t \end{aligned}$$

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

$$(2) \quad x(t_1) = x_0, v(t_1) = 0$$

$$v(t_1) = A\omega \cos(\omega t_1 + \phi) = 0$$

$A\omega \neq 0$ なので

$$\cos(\omega t_1 + \phi) = 0$$

$$\omega t_1 + \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - \omega t_1$$

$$x(t_1) = A \sin(\omega t_1 + \phi) = x_0$$

$$A \sin\left(\omega t_1 + \frac{\pi}{2} - \omega t_1\right) = x_0$$

$$A \sin \frac{\pi}{2} = x_0$$

単振動の一般解

$$x(t) = A \sin(\omega t + \phi)$$



$$v = \frac{dx}{dt}$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

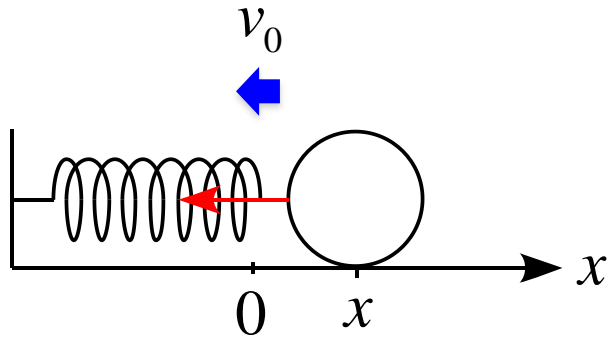
$$A = x_0$$

$$x(t) = x_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \omega t_1\right)$$

$$= x_0 \sin\left(\omega t - \omega t_1 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= x_0 \cos \omega(t - t_1)$$

単振動



運動方程式は

$$ma = -kx$$

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{k}{m} x$$

微分方程式
を解くと

$$x(t) = A \sin(\omega t + \delta), \omega^2 = \frac{k}{m}$$

このモデルの初期条件は

初速度は壁向き

$$x(0) = 0, v(0) = -v_0$$

この条件を単振動の一般解に代入し、

 A, ϕ を求める

$$x(0) = A \sin(\omega \cdot 0 + \delta) = 0$$

$$\sin \delta = 0$$

$$\delta = 0$$

$$v(0) = \omega A \cos(\omega \cdot 0 + \delta) = -v_0$$

$$A = -\frac{v_0}{\omega}$$

従って

$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

となる

問題で指定されている文字を用いると

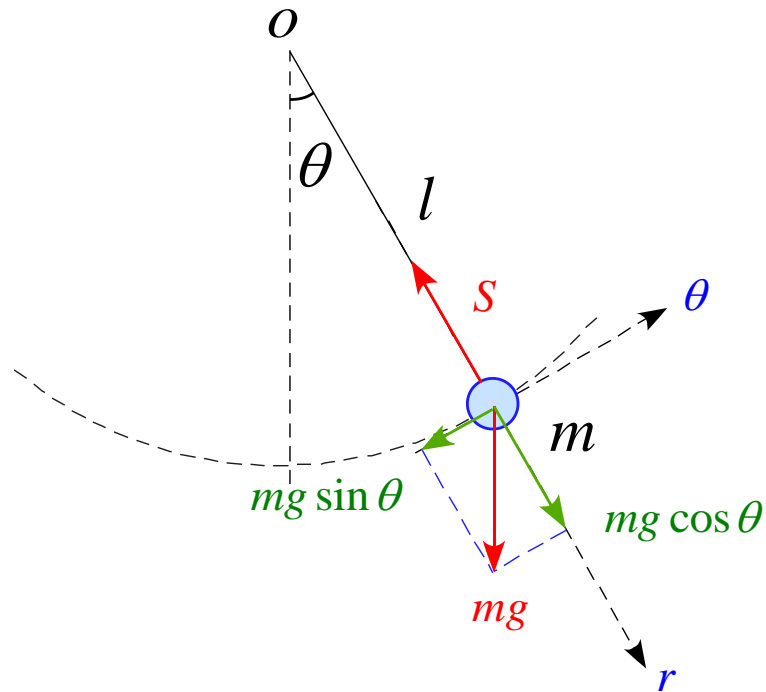
$$x(t) = -\frac{v_0}{\omega} \sin \omega t = -v_0 \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$v(t) = -\frac{v_0}{\omega} \omega \cos \omega t = -v_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

$$a(t) = v_0 \omega \sin \omega t = v_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

となる

2. (3), 10. 13. 単振り子～円運動 (期末)



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

- ・場の力・・・ mg
- ・接触力・・・ S (糸の張力)
- ・慣性力・・・無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (極座標)

何はともあれ、運動方程式

$$ma_r = mg \cos \theta - S$$

$$ma_\theta = -mg \sin \theta$$

a_r, a_θ

に代入



$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = mg \cos \theta - S$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta$$

運動方程式の θ 方向の式に着目

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = -mg \sin \theta$$

糸の長さは $r = l$ (一定) なので $\frac{dr}{dt} = 0$

$$ml \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg \sin \theta$$

さらに、極座標表示において θ 方向の速度は一般的に


$$v_\theta = r \frac{d\theta}{dt} \quad \text{であるから}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l}$$

式変形



$$d\theta = \frac{v_\theta}{l} dt$$

 t で微分(二階微分)

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{l} \frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

一般的な極座標表示 (速度)

$$v_r = \frac{dr}{dt} \quad v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$$

θ 方向の運動方程式より

$$ml \frac{1}{l} \frac{dv_{\theta}}{dt} = -mg \sin \theta$$

$$m \frac{dv_{\theta}}{dt} = -mg \sin \theta$$

$ld\theta$ で積分すると

$$\int m \frac{dv_{\theta}}{dt} ld\theta = \int (-mg \sin \theta) ld\theta$$

$$\int m \frac{dv_{\theta}}{dt} l \frac{v_{\theta}}{l} dt = \int (-mg \sin \theta) ld\theta$$

$$\int mv_{\theta} \frac{dv_{\theta}}{dt} dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} mv_{\theta}^2 \right) dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

この式に条件に合った積分区間を指定する

r 方向の運動方程式より

$$-ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = mg \cos \theta - T$$

$$T = mg \cos \theta + ml \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$= mg \cos \theta + ml \left(\frac{v_{\theta}}{l} \right)^2$$

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v_{\theta}^2}{l}$$

ある角 θ での張力 T

この式に条件を適用する

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right) dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$$t = 0 \text{ で } \theta = -\frac{\pi}{2}, v_{\theta} = 0$$

$$t = t_B \text{ で } \theta = 0, v_{\theta} = v_B$$

$$\left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right]_0^{v_B} = mgl [\cos \theta]_{-\frac{\pi}{2}}^0$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = mgl \left[\cos 0 - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgl(1-0)$$

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = mgl$$

$$v_B = \sqrt{2gl}$$

点Bでの仕事と
エネルギーの
関係式

ある角 θ での張力 T

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v_{\theta}^2}{l}$$

$$\text{点Bで } \theta = 0, v_{\theta} = v_B$$

$$T_B = mg \cos 0 + m \frac{v_B^2}{l}$$

$$= mg + m \frac{(\sqrt{2gl})^2}{l}$$

$$= mg + m \frac{2gl}{l}$$

$$= 3mg$$

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right) dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$$t = 0 \text{ で } \theta = -\frac{\pi}{2}, v_{\theta} = 0$$

$$t = t_c \text{ で } \theta = \theta_c, v_{\theta} = v_c$$

$$\left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right]_0^{v_c} = mgl \left[\cos \theta \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta_c}$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 - \frac{1}{2} m \cdot 0^2 = mgl \left[\cos \theta_c - \cos \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right]$$

$$\frac{1}{2} m v_c^2 = mgl \cos \theta_c$$

$$v_c = \sqrt{2gl \cos \theta_c}$$

点Cでの
仕事と
エネルギーの
関係式

ある角 θ での張力 T

$$T = mg \cos \theta + m \frac{v_{\theta}^2}{l}$$

点Cで $\theta = \theta_c, v_{\theta} = v_c$

$$T_c = mg \cos \theta_c + m \frac{v_c^2}{l}$$

$$= mg \cos \theta_c + m \frac{\left(\sqrt{2gl \cos \theta_c} \right)^2}{l}$$

$$= mg \cos \theta_c + m \frac{2gl \cos \theta_c}{l}$$

$$= 3mg \cos \theta_c$$

ある角 θ での仕事とエネルギーの関係式

$$\int \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right) dt = \int (-mgl \sin \theta) d\theta$$

$t = 0$ で $\theta = 0, v_{\theta} = v_0$ ← 最下点

$t = t$ で $\theta = \theta, v_{\theta} = v_{\theta}$

$$\left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 \right]_{v_0}^{v_{\theta}} = mgl [\cos \theta]_0^{\theta}$$

$$\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgl (\cos \theta - \cos 0)$$

$$\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = mgl (\cos \theta - 1)$$

$$\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 - mgl (\cos \theta - 1) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

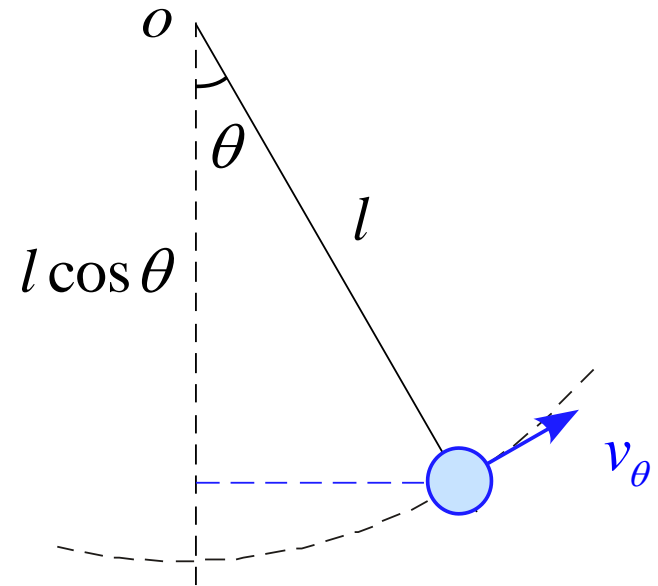
定数

両辺を t で微分すると

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m v_{\theta}^2 + mgl (1 - \cos \theta) \right] = 0$$

運動エネルギー

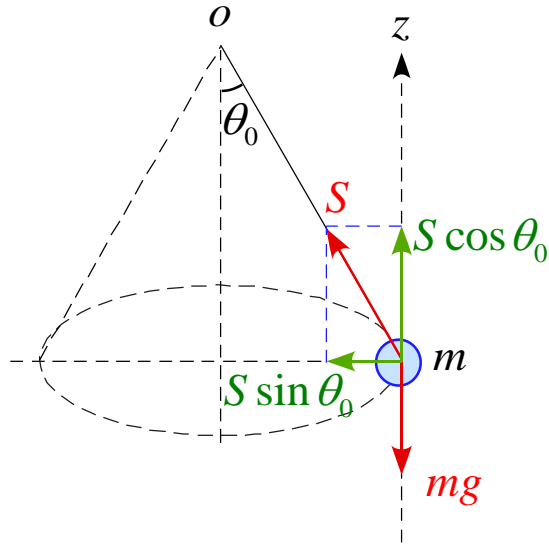
位置エネルギー



仕事とエネルギーの
関係式

11. 円錐振り子～円運動 (期末)

・作図は丁寧に！



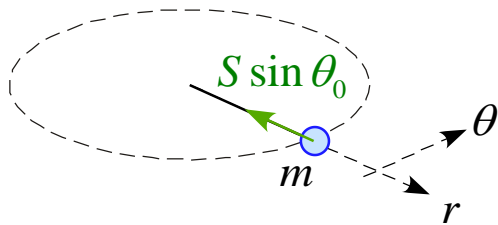
1. 図に作用する力を書き込む

- ・場力 … mg
- ・接触力 … S (糸の張力)
- ・慣性力 … 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている
(垂直上向き + 極座標)

何はともあれ、運動方程式



上向きを正に z 軸をとると

$$ma_z = S \cos \theta_0 - mg$$

水平面内において極座標をとると

$$ma_r = -S \sin \theta_0$$

$$ma_\theta = 0$$

z 軸を方向の運動方程式は

$a_z = 0$ より

$$0 = S \cos \theta_0 - mg$$

$$S = \frac{mg}{\cos \theta_0}$$

水平面内における極座標は

$$m \left[\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -S \sin \theta_0$$

$$m \left[2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

糸の長さは $r = l \sin \theta_0$ (一定) より $\frac{dr}{dt} = 0$

$$-ml \sin \theta_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -S \sin \theta_0$$

$$ml \sin \theta_0 \frac{d^2 \theta}{dt^2} = 0$$

極座標表示において θ 方向の速度は

一般的に $v_\theta = r \frac{d\theta}{dt}$ であるから

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{r} \quad \text{式変形} \quad \Rightarrow \quad d\theta = \frac{v_\theta}{r} dt$$

\Downarrow t で微分(二階微分)

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = \frac{1}{r} \frac{dv_\theta}{dt}$$

と表される。

$r = l \sin \theta_0$ より

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l \sin \theta_0}$$

r 方向の運動方程式より

$$ml \sin \theta_0 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = S \sin \theta_0$$

$$ml \sin \theta_0 \left(\frac{v_\theta}{l \sin \theta_0} \right)^2 = S \sin \theta_0 \leftarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{v_\theta}{l \sin \theta_0} \text{ を代入}$$

$$m \frac{v_\theta^2}{l \sin \theta_0} = S \sin \theta_0$$

$$v_\theta^2 = \frac{Sl}{m} \sin^2 \theta_0$$

$$v_\theta^2 = \frac{mg}{\cos \theta_0} \frac{l}{m} \sin^2 \theta_0 \leftarrow S = \frac{mg}{\cos \theta_0} \text{ を代入}$$

$$v_\theta = \sqrt{\frac{gl}{\cos \theta_0}} \sin \theta_0$$

$$v_\theta T = 2\pi r$$

↑ ↑

1周期で 円1周分
進む距離

$$T = \frac{2\pi r}{v_\theta} = \frac{2\pi l \sin \theta_0}{\sqrt{\frac{gl}{\cos \theta_0}} \sin \theta_0}$$

$$= 2\pi \sqrt{\frac{l \cos \theta_0}{g}}$$