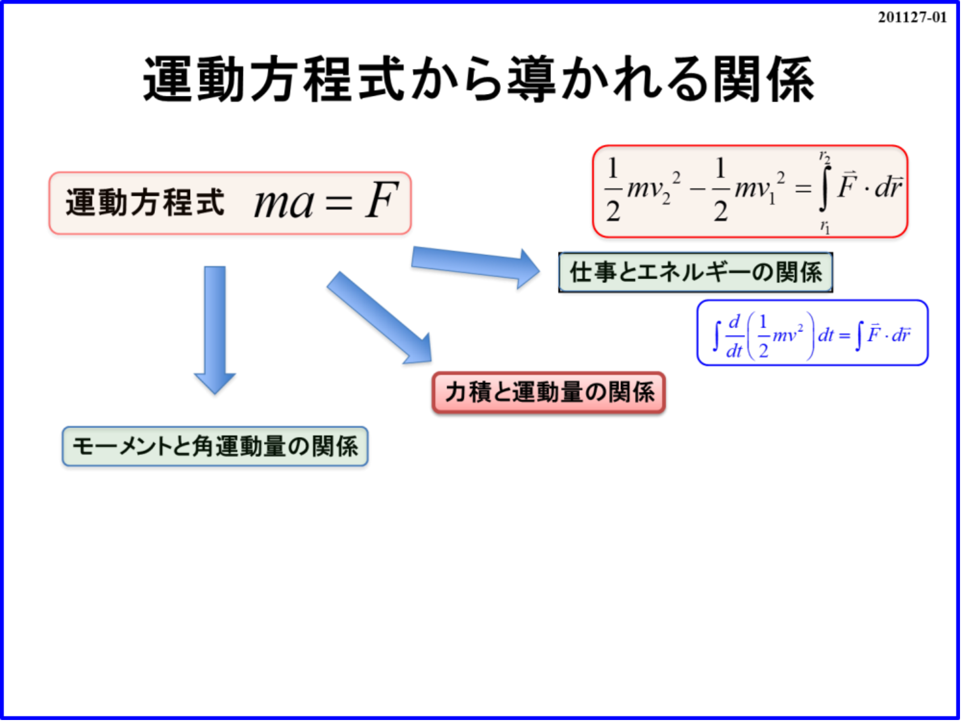
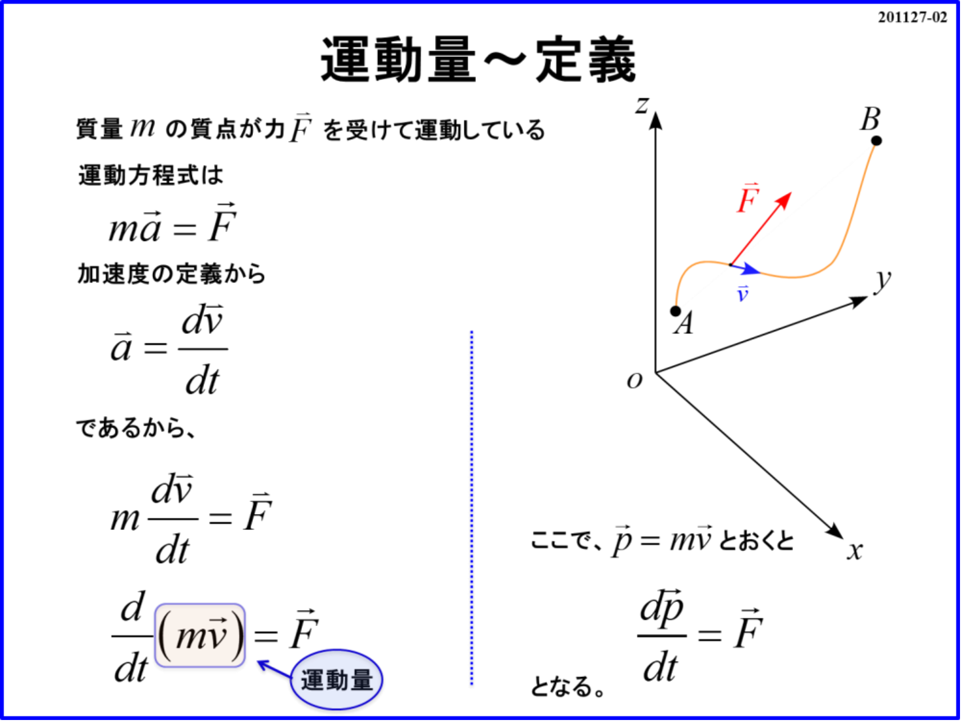


前回に続き「運動方程式から導かれる関係」を扱っていきます。

今回は2つ目の関係式である「力積と運動量の関係」を解説していきます。



3次元空間での一般的なモデルを考えてみましょう。

運動方程式は

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

となり、加速度の定義 $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ より

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

となります。

ここで質量 m が一定であれば の $\frac{d}{dt}$(　　) 中にそのまま入れることが出来ます。
すると

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$$

となります。
この式の形は「ニュートンが初めに提唱した運動方程式の形」になります。
運動方程式は $m\vec{a} = \vec{F}$ が有名過ぎてあまりこの形の式は知られていない
かもしれませんが、こちらの形が先になります。
従って、運動方程式「 $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ 」において、
「質量 m が定数ならそのまま微分の外に出せる」と言うのが正しいわけです。
実は、この形「 $\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \vec{F}$ 」は質量 m が一定でない場合も含んでいます。
この左辺の微分を計算すると

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = \frac{dm}{dt}\vec{v} + m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

となります。
ここで $\frac{dm}{dt} = 0$ 、即ち「質量 m の時間的変化無し」とすれば「第1項がゼロ」となり、
「第2項の $m\frac{d\vec{v}}{dt}$ 」が残ることになります。
質量が変化するモデルの例として「ロケット(燃料が減る)」「分裂」などがあります。

話を戻すと、運動方程式は別の形として

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right)=\vec{F}$$

と記述されます。

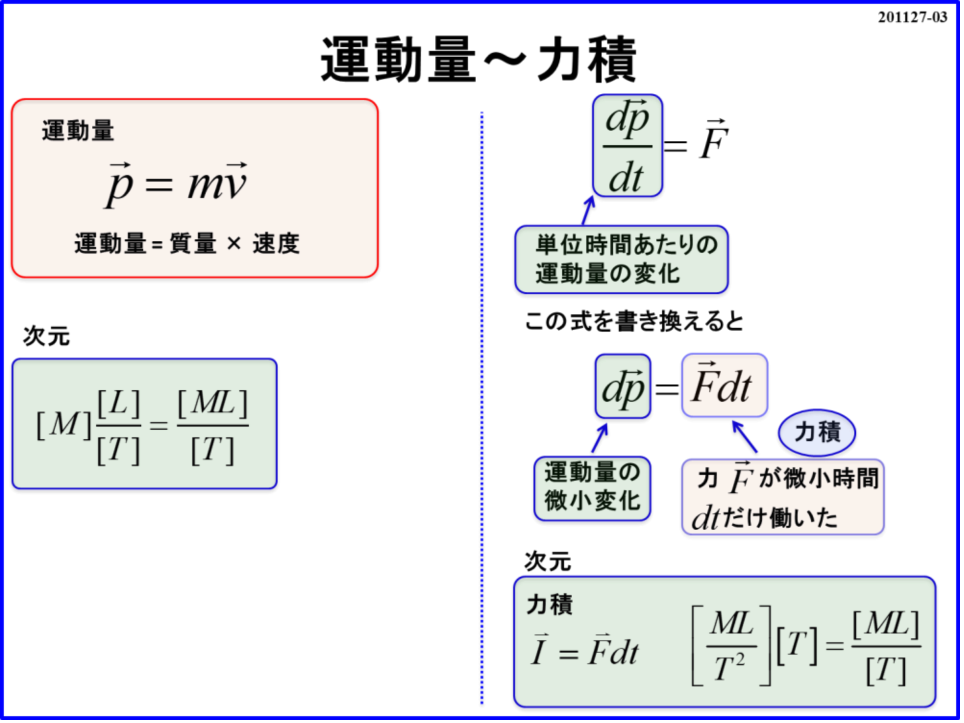
ここで、$\frac{d}{dt}$(　　)でまとめられたの部分「 $m\vec{v}$ 」を「運動量 $\vec{p}$ 」と呼びます。

運動エネルギーの時と同様に、(　　)の内部は物理的に意味のある量となります。

運動量 $m\vec{v}$ を $\vec{p}$ と書き換えると

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}$$

となります。



左辺の $\frac{d\vec{p}}{dt}$ は「単位時間あたりの運動量の変化」を表しています。

$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

と変形すると、「 $d\vec{p}$ は運動量の微小変化」を表し
「 $\vec{F}dt$ は力 $\vec{F}$ が微小時間 dt 働いた」と言うことを表しています。
この「 $\vec{F}dt$ 」を「力積 $\vec{I}$ 」と呼びます。

力積と運動量の次元については

運動量について

$$[M]\left[\frac{L}{T}\right]=\left[\frac{ML}{T}\right]$$ となります。

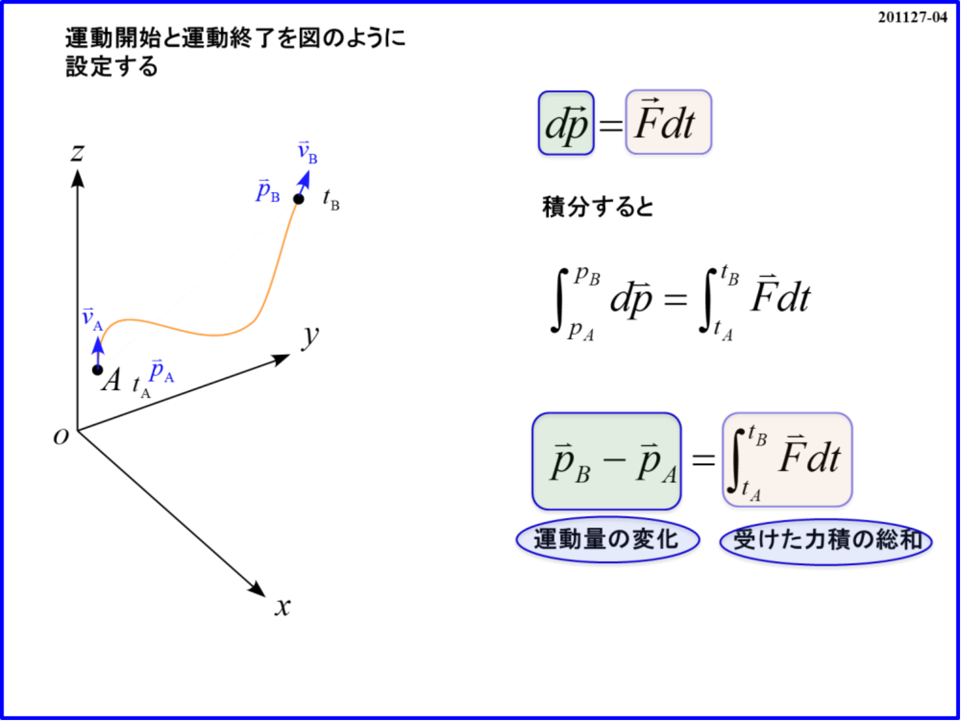
(m の次元)　($\vec{v}$ の次元)

力積について

$$\left[\frac{ML}{T^2}\right][T]=\left[\frac{ML}{T}\right]$$ となります。

($\vec{f}$ の次元)　(t の次元)

従って、**力積 $\vec{I}$ と運動量 $\vec{p}$ の次元が等しい**ことが判ります。



$$d\vec{p} = \vec{F}dt$$

となるので、AB間は全時間に対する和になります。

$$\int d\vec{p} = \int \vec{F}dt$$

初期条件

$\boldsymbol{t = t_{\mathrm{A}}}$ **で** $\boldsymbol{v(t_{\mathrm{A}}) = v_{\mathrm{A}},\ \vec{p}(t_{\mathrm{A}}) = p_{\mathrm{A}}}$

$\boldsymbol{t = t_{\mathrm{B}}}$ **で** $\boldsymbol{v(t_{\mathrm{B}}) = v_{\mathrm{B}},\ \vec{p}(t_{\mathrm{B}}) = p_{\mathrm{B}}}$

とすると

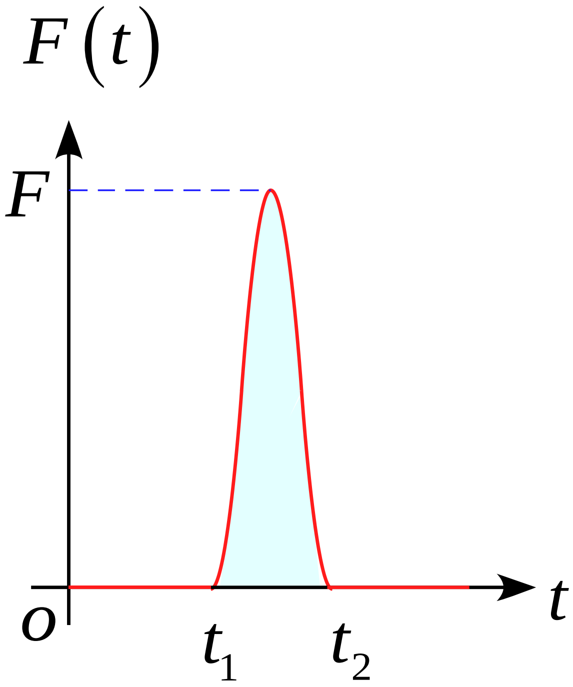
$$\int_{p_\mathrm{A}}^{p_\mathrm{B}} d\vec{p} = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \vec{F} dt$$

$$\left[\vec{p}\right]_{p_\mathrm{A}}^{p_\mathrm{B}} = \int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \vec{F} dt$$

$$\underbrace{\vec{p}_\mathrm{B} - \vec{p}_\mathrm{A}}_{\text{運動量の変化}} = \underbrace{\int_{t_\mathrm{A}}^{t_\mathrm{B}} \vec{F} dt}_{\text{受けた力積の総和}}$$

となります。

多くの場合、力積 $\int \vec{F}\,dt$ は直接求めることは困難になります。
$F-t$ グラフを考えると



となるので、$\int \vec{F}dt$はこの図の水色の面積に相当します。
この面積の計算は難しいですよね？

従って、**多くの場合は「運動量の変化 $\Delta\vec{p}$ から力積 $\vec{I}$ を算出する」**ことになります。

話を運動方程式に戻します。

ここで、運動方程式から「仕事とエネルギーの関係」を導くと
スライド201120-06の解説より

$$\int \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt = \int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

と表されます。
ここで初期条件として

$$\vec{v}(t_{\mathrm{A}}) = v_{\mathrm{A}}$$

$$\vec{v}(t_{\mathrm{B}}) = v_{\mathrm{B}}$$

と設定すると、この積分は

$$\underbrace{\int_{t_{\mathrm{A}}}^{t_{\mathrm{B}}} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)dt}_{\text{運動エネルギーの変化量 } \Delta K} = \underbrace{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}\cdot d\vec{r}}_{\text{外力の仕事}}$$

運動エネルギーの
変化量 ΔK

外力の仕事

となります。

201127-05

運動量～エネルギー

この式を運動エネルギーの変化と比較してみると

$$\frac{1}{2}m{v_B}^2-\frac{1}{2}m{v_A}^2=\int \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

力の距離積分
(力がどれくらいの距離働いたか？)

運動エネルギーの変化は仕事による

$$\vec{p}_B-\vec{p}_A=\int \vec{F}dt$$

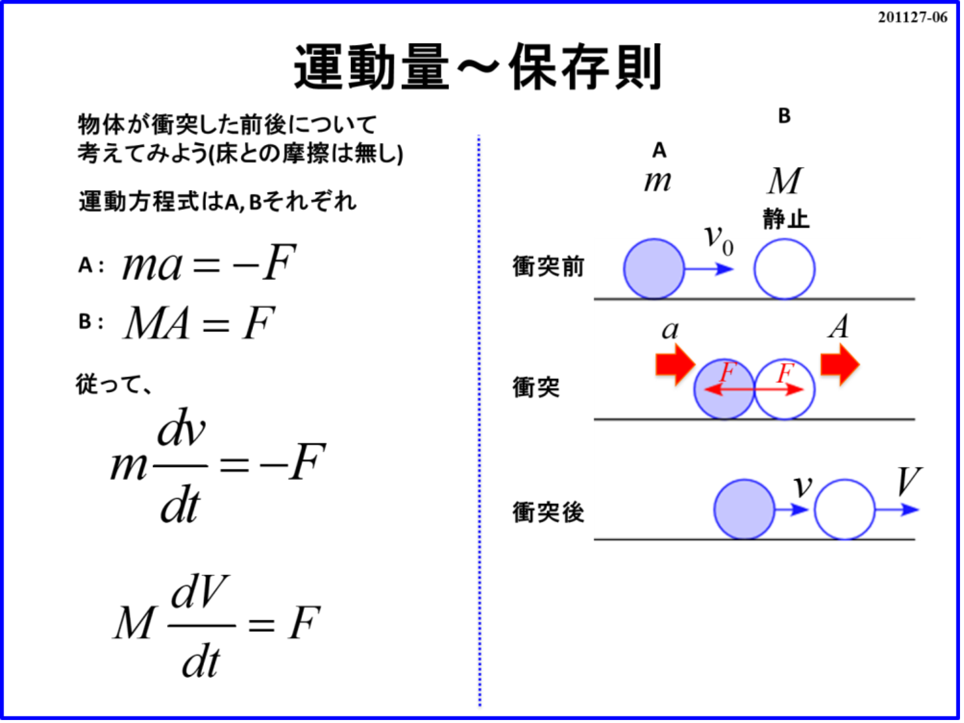
力の時間積分
(力がどれくらいの時間働いたか？)

運動量の変化は力積による

ここで、前回の授業で扱った「仕事とエネルギーの関係式」と比較してみましょう。

左辺の運動エネルギーや運動量といった量は
「**運動の激しさを表した物理量**」になります。
運動方程式の「距離積分」を行うと
「運動エネルギーと仕事の関係式」が導かれます。
運動エネルギー K は「距離的な激しさ」を表し、
運動エネルギーの変化は仕事が原因であると言えます。

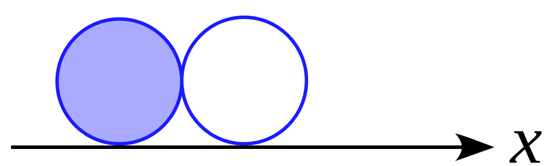
一方、**運動方程式の「時間積分」**を行うと**「運動量と力積の関係式」**が導かれます。
運動量 $\vec{p}$ は「時間的な激しさ」を表し、運動量の変化は力積が原因であると言えます。



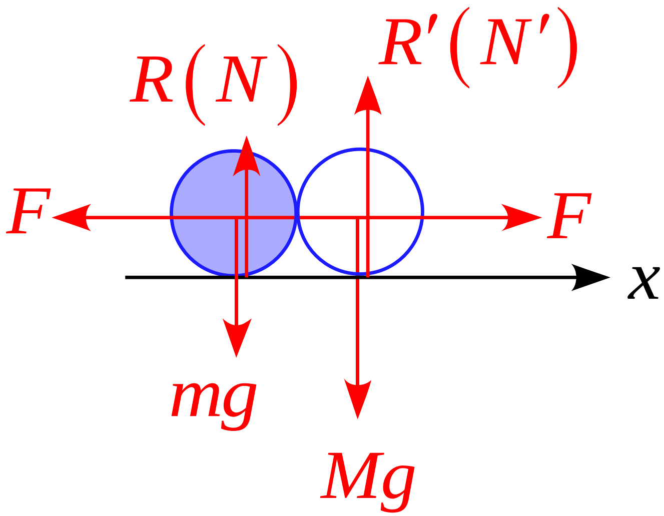
続いて、例を用いて運動量について考えてみましょう。

図の右側に衝突の流れの図が描かれています。
質量 m の物体A(青玉)と質量 M の物体B(白玉)が衝突する運動になります。
静止している物体Bに速度 v_0 で運動している物体Aが衝突します。
衝突の前後でどのようになっていつか検討していきます。

作図と軸を設定します。
図は衝突する瞬間の図を描きます。



作用する力の矢印を書き込むと



物体Aに作用する力は「重力 mg 」「抗力 $R(N)$ 」「衝突時に力 F」になります。
物体Bに作用する力は「重力 Mg 」「抗力 $R'(N')$ 」「衝突時に力 F」になります。

この様な x 方向のみに着目するモデルでは y 方向の省略は可です。

物体Aの加速度を $\boldsymbol{a}$, 速度を $\boldsymbol{v}$ とし、物体Bの加速度を $\boldsymbol{A}$, 速度を $\boldsymbol{V}$ とします。
(物体A, Bは別物として別の文字で表します。)

運動方程式は

$$ma_x = -F \qquad MA_x = F$$

$$ma_y = N - mg \qquad MA_y = N' - Mg$$

束縛条件 $\boldsymbol{a_y = 0, A_y = 0}$ と $\boldsymbol{a_x = a, A_y = A}$ と書き換えると

$$ma = -F \qquad MA = F$$

$$0 = N - mg \qquad 0 = N' - Mg$$

となります。
$\boldsymbol{x}$ 方向に着目して

$$ma = -F$$

$$MA = F$$

加速度の定義 $\boldsymbol{a = \frac{dv}{dt}, A = \frac{dV}{dt}}$ (1次元)より

$$m\frac{dv}{dt} = -F$$

$$M\frac{dV}{dt} = F$$

と表されます。

運動量～保存則

この2式の和をとると

$$m\frac{dv}{dt}+M\frac{dV}{dt}=-F+F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)+\frac{d}{dt}(MV)=0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\boxed{mv+MV}\right)=0$$

運動量の合計

となる

従って、

この衝突において運動量の和は
時間的に変化していない。

運動量が保存している

即ち、この例のモデルでは

$$\underbrace{\boxed{mv+MV}}_{\text{衝突後の運動量}}=\underbrace{\boxed{mv_0+M\cdot 0}}_{\text{衝突前の運動量}}$$

が成立する。

ここで2式の和を取ると

$$m\frac{dv}{dt}+M\frac{dV}{dt}=-F+F$$

$$\frac{d}{dt}(mv)+\frac{d}{dt}(MV)=0$$

$\frac{d}{dt}(\qquad)$ **にまとめると**

$$\frac{d}{dt}(mv+MV)=0$$

となります。

この $\frac{d}{dt}(\qquad)$ の内部の「 $mv + MV$ 」は「2つの物体の運動量の総和」になっています。
これを「t で微分して 0 」なので、この量、即ち「運動量の総和が時間に対して変化せず保存している」と言えます。

201127-08

運動量保存則

運動量保存則

外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない

$$\frac{d}{dt}(mv + MV) = 0$$

$$\boxed{mv + MV} = \boxed{mv_0 + MV_0}$$

衝突後の全運動量　衝突前の全運動量

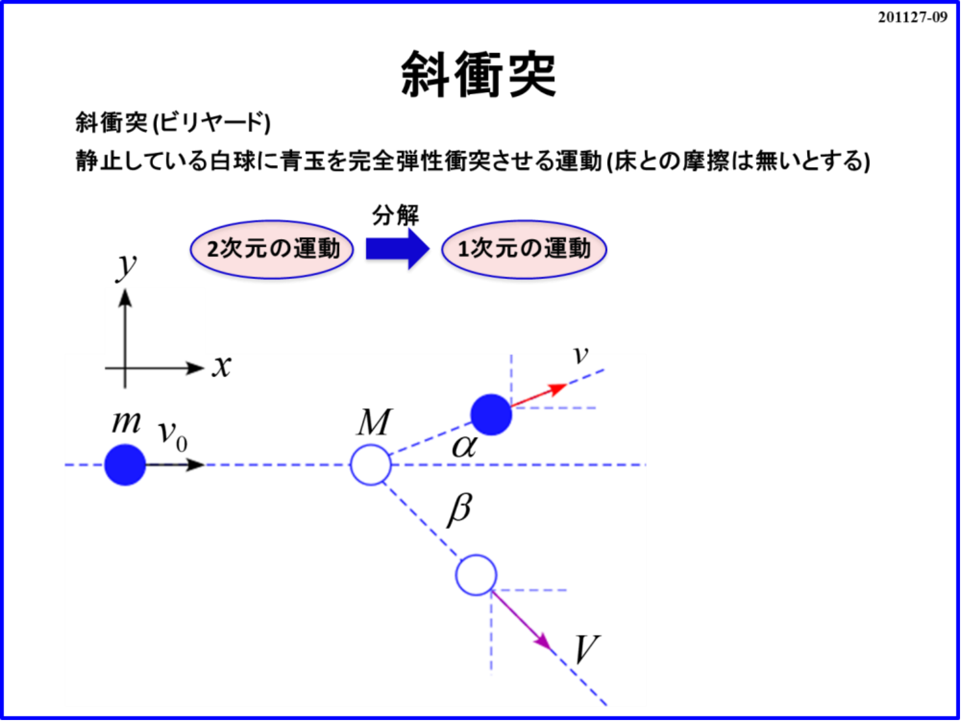
「運動量保存則」とは「外力が働かなければ、系の全運動量は変化しない」という事です。

例えば2つの物体の衝突において、2つの物体同士は力が作用します。
「作用・反作用の力」として力が作用しますが、この力は外から加えられた力ではありません。
従って「運動量保存則」が成り立つことになります。

運動量保存則の活用の一例として

$$\underbrace{mv + MV}_{\text{衝突前}} = \underbrace{mv' + MV'}_{\text{衝突後}}$$

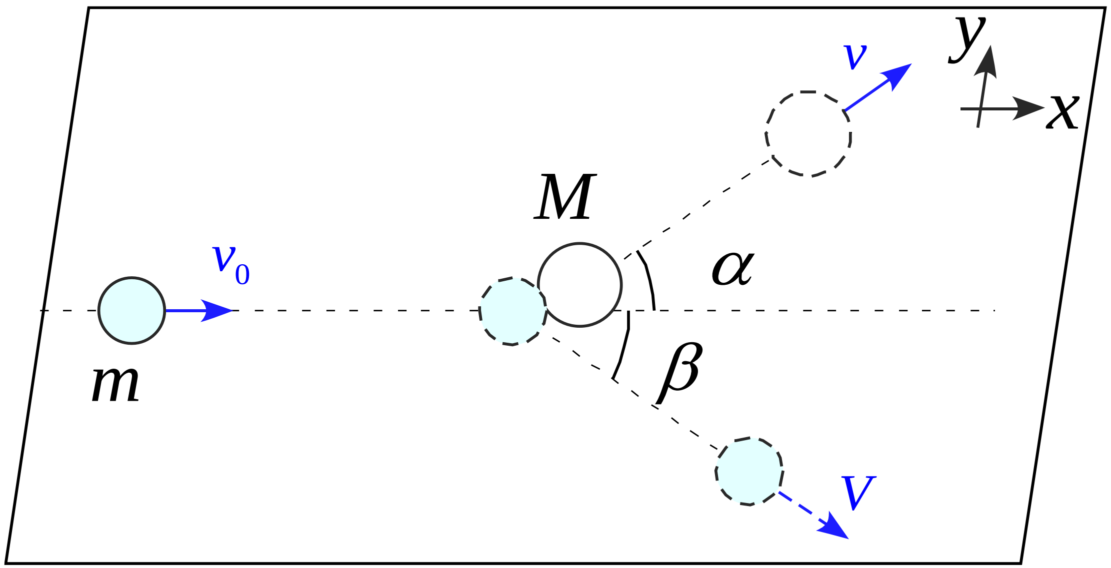
という形で利用します。



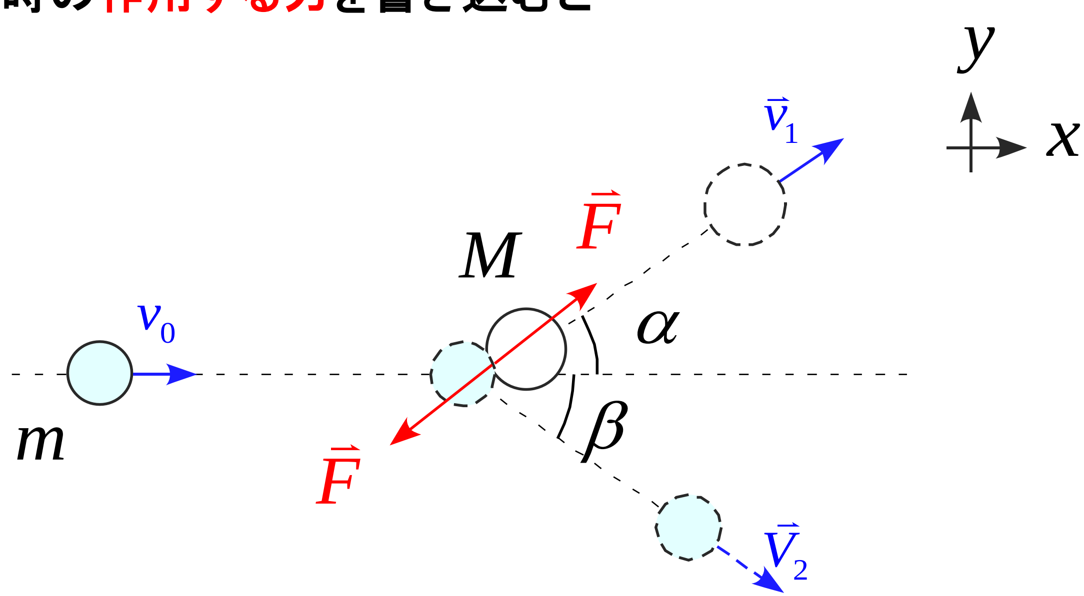
斜衝突のモデルについて検討してみましょう。
スライドの図はビリヤード台を真上から見た図であるとイメージして下さい。

静止している質量 M の白玉に質量 m の青玉が速度 v_0 で衝突したとします。
この衝突について運動方程式から検討していきます。

作図と軸の設定については問題の設定を利用します。



衝突時の作用する力を書き込むと



運動方程式はそれぞれ

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right) = -\vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right) = \vec{F}$$

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2\right) = 0$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、
青玉の速度 $\vec{v}_1$
白玉の速度 $\vec{V}_2$
とする

外から外力が加わっていない → 前後の運動量については保存している

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2 = m\vec{v}_1{}' + M\vec{V}_2{}'$$

衝突前の全運動量　衝突後の全運動量

$$m\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

衝突時に力 $\vec{F}$ が作用し、衝突後の青玉の速度 $\overrightarrow{v_1}$, 白玉の速度 $\overrightarrow{V_2}$ とし
運動方程式をニュートンが初めに提唱した形で記述すると

質量 m の青玉については

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right) = -\vec{F}$$

質量 M の白玉については

$$\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right) = \vec{F}$$

となります。

ここで2式の和を取ると

$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1\right)+\frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_2\right)=-\vec{F}+\vec{F}$$

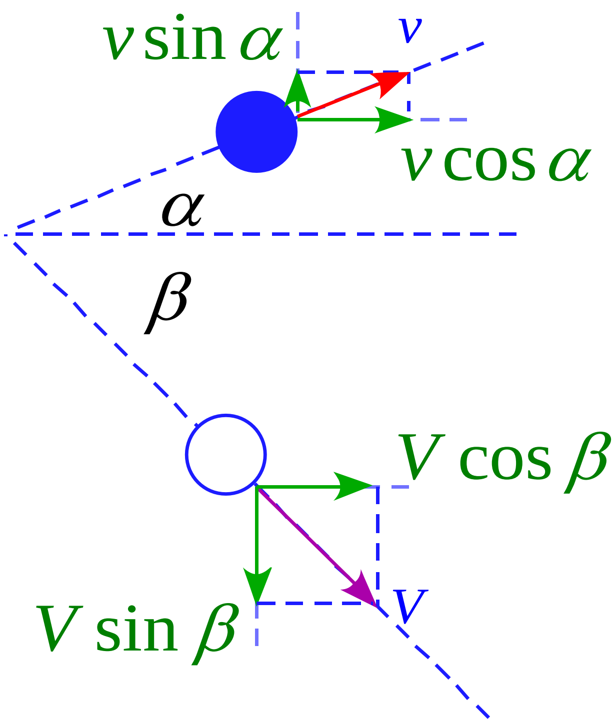
$$\frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_1+M\vec{V}_2\right)=0$$

となり、運動量の総和が保存していることが確認できます。
従って、運動量保存則から

$$m\vec{v}_1+M\vec{V}_2=m\vec{v}_1'+M\vec{V}_2'$$

となります。

ここで衝突後の速度については
右図のように成分分解ができます。



従って、速度については

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_1' = \begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} \quad \vec{V}_2' = \begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

となり、前述の式は

$$m\vec{v}_1 + M\vec{V}_2 = m\vec{v}_1' + M\vec{V}_2'$$

$$m\begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} v\cos\alpha \\ v\sin\alpha \end{pmatrix} + M\begin{pmatrix} V\cos\beta \\ -V\sin\beta \end{pmatrix}$$

となります。

従って、

x 方向: $mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$

y 方向: $m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$

x 方向: $mv_0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$

y 方向: $0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$

完全弾性衝突 → 前後でのエネルギーロスは無い

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2$$

この式を方向、方向の成分毎に表すと

$$mv_0 + M \cdot 0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$$

$$m \cdot 0 + M \cdot 0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$$

となり

$$mv_0 = mv\cos\alpha + MV\cos\beta$$

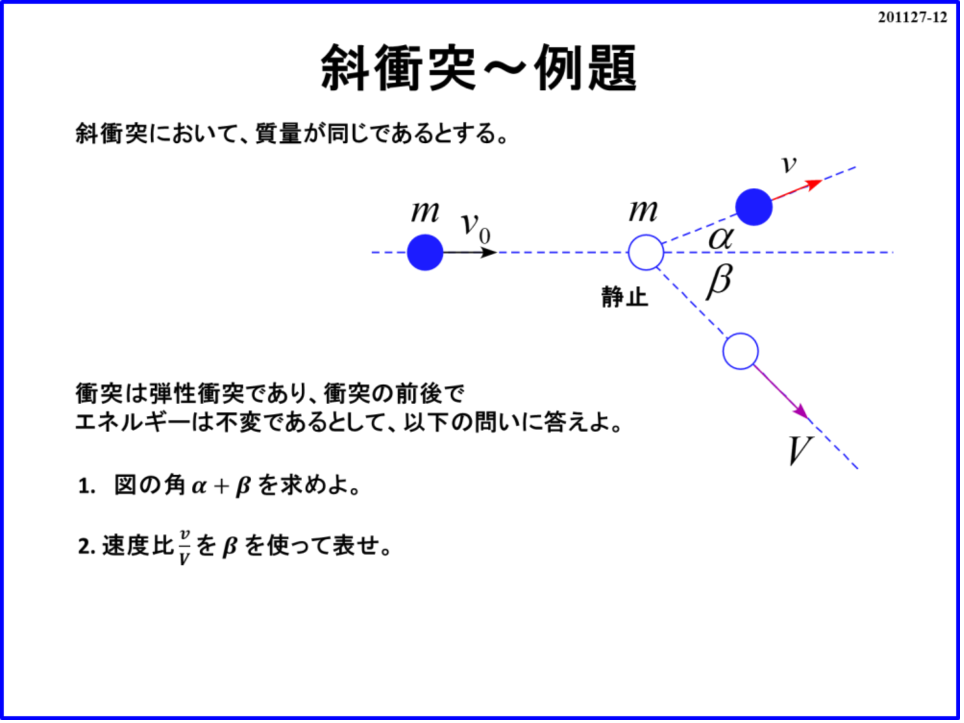
$$0 = mv\sin\alpha - MV\sin\beta$$

となります。

ここまでの条件だけでは不十分になります。
ここで「この衝突は完全弾性衝突」であることを用います。
「完全弾性衝突」とは、衝突の前後で「エネルギーロスが無い衝突」になります。
従って、運動エネルギーについて

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{\text{衝突前の運動エネルギー}} = \underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2}_{\text{衝突後の運動エネルギー}}$$

が成り立ちます。



前のモデルの続きになります。
前と同じ衝突になるのですが、ここでは**2つの物体の質量が等しいという設定**になっています。
そこで前のスライドの式は

$$mv_0 = mv\cos\alpha + mV\cos\beta$$

$$0 = mv\sin\alpha - mV\sin\beta$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mV^2$$

となります。

m**を消去して式を整理すると**

$$v_0 = v\cos\alpha + V\cos\beta \quad \cdots(1)$$

$$0 = v\sin\alpha - V\sin\beta \quad \cdots(2)$$

$$v_0^2 = v^2 + V^2 \quad \cdots(3)$$

となります。
(1), (2) の両辺をそれぞれ2乗して和を取ると

$$v_0^2 = \left(v\cos\alpha + V\cos\beta\right)^2 = v^2\cos^2\alpha + V^2\cos^2\beta + 2v\cos\alpha\cdot V\cos\beta$$

$$0 = \left(v\sin\alpha - V\sin\beta\right)^2 = v^2\sin^2\alpha + V^2\sin^2\beta - 2v\sin\alpha\cdot V\sin\beta$$

$$v_0^2 = v^2\cos^2\alpha + v^2\sin^2\alpha + V^2\cos^2\beta + V^2\sin^2\beta + 2v\cos\alpha\cdot V\cos\beta - 2v\sin\alpha\cdot V\sin\beta$$

$$v_0^2 = v^2\left(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha\right) + V^2\left(\cos^2\beta + \sin^2\beta\right) + 2vV\left(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta\right)$$

$$v_0^2 = v^2 + V^2 + 2vV\left(\cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta\right)$$

加法定理を利用

$$v_0^2 = v^2 + V^2 + 2vV\cos\left(\alpha + \beta\right)$$

となります。
右辺に (3) を代入すると

$$v_0^2 = v_0^2 + 2vV\cos\left(\alpha + \beta\right)$$

$$0 = 2vV\cos\left(\alpha + \beta\right)$$

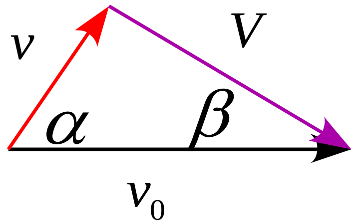
従って、

$$\cos\left(\alpha + \beta\right) = 0$$

$$\alpha + \beta = 90^\circ$$

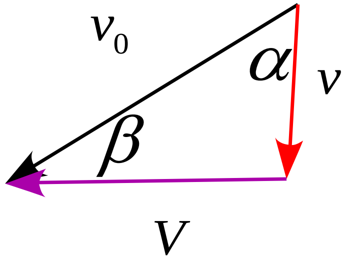
となります。

ここで速度について作図を行うと

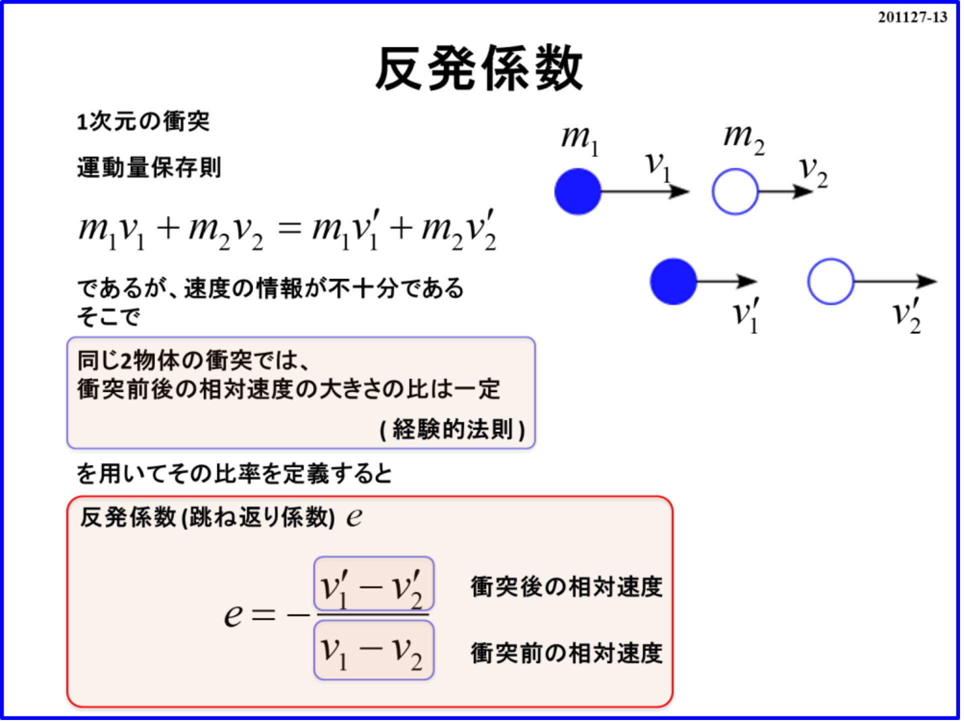


となります。
前の問いより $\boldsymbol{\alpha+\beta=90^\circ}$ なのでこの三角形は直角三角形である。
従って

$$\frac{v}{V}=\tan\beta$$



となります。



直線運動の衝突モデルを考えます。

「運動量保存則」が成り立つとき

$$m_1v_1+m_2v_2=m_1v_1'+m_2v_2'$$

が成り立ちます。
しかし、これだけでは速度の情報が不十分です。
この衝突の前後における速度の関係が経験的に知られています。
その関係が「衝突の前後の相対速度の大きさの比は一定」になります。

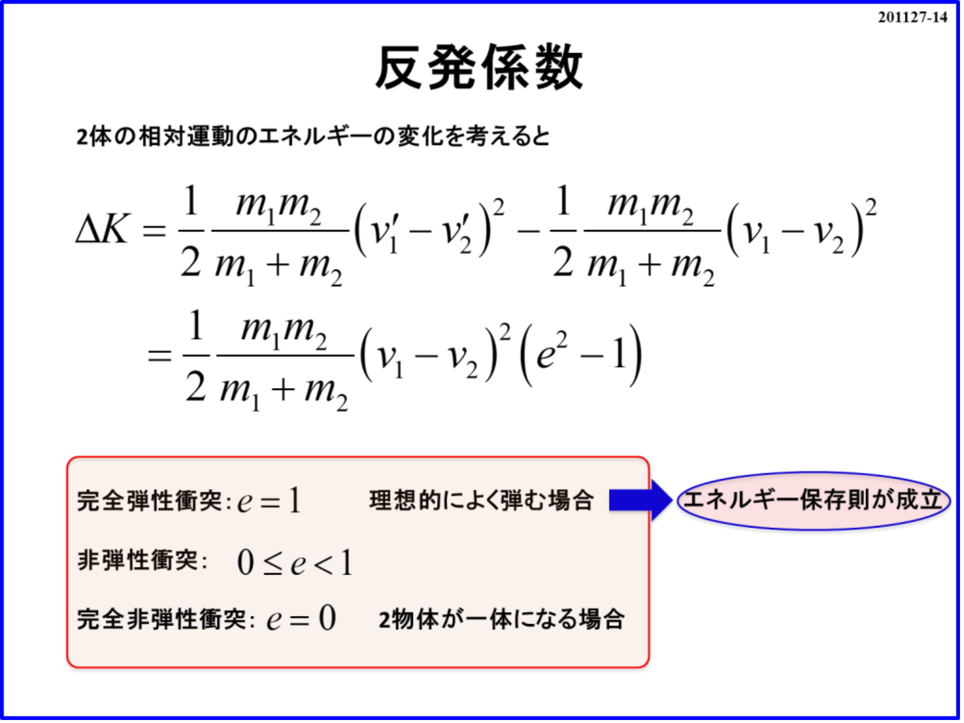
この比率 e は

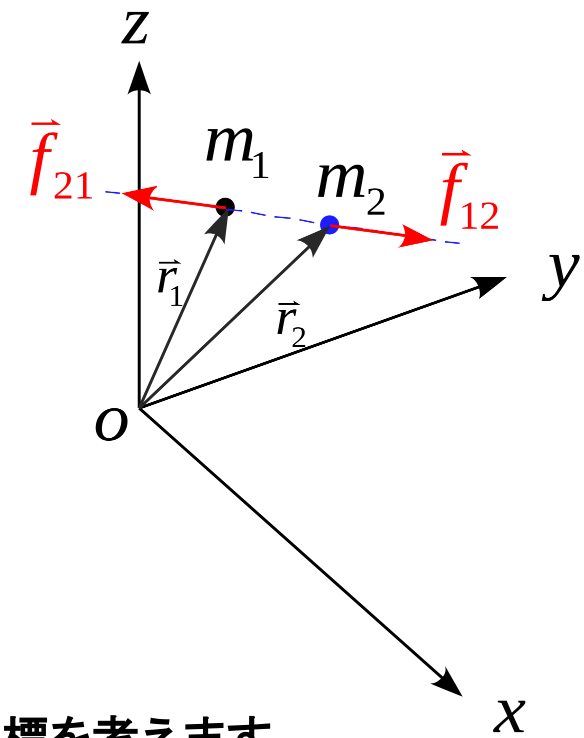
$$e = -\frac{v'_1 - v'_2}{v_1 - v_2}$$

と表されます。
この比率 e を「反発係数」と呼びます。
式変形すると

$$\underbrace{(v_1 - v_2)}_{\text{衝突前}} e = -\underbrace{(v'_1 - v'_2)}_{\text{衝突後}}$$

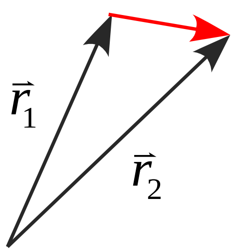
になります。「マイナス」が付くことを忘れないようにしましょう。





この時の運動エネルギーについて検討するために相対座標を考えます。

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}_{12}$ 相対位置ベクトル



運動方程式をそれぞれに対して立てると

$$m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -f_{12}$$

$$m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = f_{12}$$

となります。
この2式において、$\overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ の形を作るために
それぞれの式に m_1, m_2 をかけて差を取ると

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = -m_2 f_{12}$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} = m_1 f_{12}$$

$$m_1 m_2 \left(\frac{d^2 \vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} \right) = m_1 f_{12} + m_2 f_{12}$$

$$m_1 m_2 \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \left(m_1 + m_2\right) f_{12}$$

となります。
ここで、$\overrightarrow{r_{12}} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$ と書き換えれば

$$m_1 m_2 \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = \left(m_1 + m_2\right) f_{12}$$

$$\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{d^2 \vec{r}_{12}}{dt^2} = f_{12}$$

となります。
この式は質量を

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$$

とした運動方程式と見ることができます。
この質量 μ を「換算質量」と呼びます。

ここで本題に入ります。
2物体の相対運動を考え、その2物体の質量を換算質量 μ として考えると
この衝突での運動エネルギー変化 ΔK は

$$\Delta K = \frac{1}{2}\mu\left(\vec{v}_1' - \vec{v}_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\mu\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1' - \vec{v}_2'\right)^2 - \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\left(\vec{v}_1' - \vec{v}_2'\right)^2 - \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[\left(-e\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\right)^2 - \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left[e^2\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2 - \left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)^2\left(e^2 - 1\right)$$

となります。

ここで e^2-1 に着目すると

$e=1$ となる時 $e^2-1=0$ となり $\Delta K=0$ となります。
この時、エネルギーロスは無く「完全弾性衝突」となります。

通常 e は $0 \leq e \leq 1$ でありこれを「非弾性衝突」と呼びます。

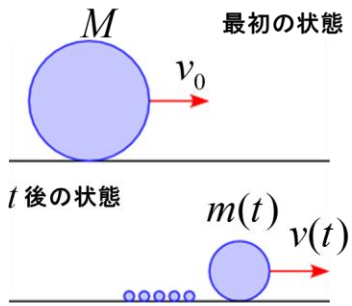
$e=0$ の場合は「完全非弾性衝突」となり、この時は2物体が一体となった場合になります。

運動量保存則～例題

例題

滑らかな水平面上で、後方に単位時間あたりm_0の物質を噴出しながら運動する物体がある。物体の初期質量をM、初速度をv_0とし、噴出物質の速度は常に0になるように噴出されるものとする。
以下の問いに答えよ。

1. 時間t後の質量$m(t)$を記述せよ。
2. この運動の運動方程式を記述せよ。
3. 時間t後の速度$v(t)$を求めよ。
4. 時間t後の移動距離$x(t)$を求めよ。



このモデルは、物体の質量が変化する場合のモデルになります。
単位時間あたりm_0の質量を噴出するが、噴出物質の速度は常に0で変化しない。
従って、この噴出により速度変化が生じないので作用する力は無いと考えられる。
従って、運動方程式は

$$\frac{d}{dt}\left[m(t)v(t)\right]=0$$

と記述できます。
従って、運動量保存則が成立していることが確認できます。

この物体の質量は単位時間あたり m_0 だけ減るので

$$m(t) = M - m_0 t$$

となります。
ここで運動量保存則を用いると

$$m(t)v(t) = Mv_0$$

$$v(t) = \frac{M}{m(t)} v_0 = \frac{M}{M - m_0 t} v_0$$

となります。
これを t で積分すると

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{M}{M - m_0 t} v_0$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{M}{M - m_0 t} dt$$

となります。

この運動の積分区間は $t=0$ から$t=t$ までなので

$$\boxed{\int \frac{1}{x}dx = \log|x|}$$

$$x(t) = \int_0^t \frac{M}{M-m_0 t} v_0 dt$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0}\left[\log(M-m_0 t)\right]_0^t$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0}\left[\log(M-m_0 t) - \log(M-m_0\cdot 0)\right]$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0}\left[\log(M-m_0 t) - \log M\right]$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0}\log\frac{M-m_0 t}{M}$$

となります。

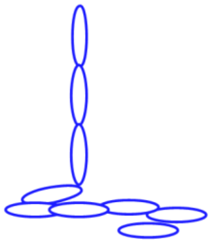
運動量保存則～例題

例題

床の上に線密度 ρ の鎖が置いてある。
この鎖の端を持って鉛直に引き上げる運動を考える。
重力加速度を g として以下の問いに答えよ。

引き上げた部分の長さが x 、速度が v 、加速度が a となったとき

1. 引き上げた部分の質量 m を記述せよ。
2. この時の運動方程式を記述せよ。
3. 引き上げる力 F の大きさを求めよ。
4. 一定の速度 v で引き上げる場合の力の大きさを求めよ。



この問題はレポート課題の1つとして扱う予定なのでここでは解答はしません。