

# 中心力

質点に働く力が常に空間の1点を向いている  
力  $\vec{F}$  の作用線が常にある任意の点  $O$  を通る

中心力

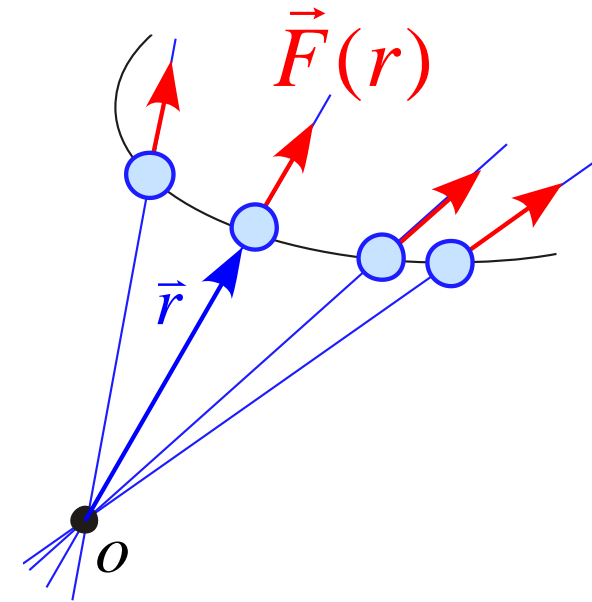
$$\vec{F} = F \frac{\vec{r}}{r}$$

力の大きさ

力の向き  
単位ベクトル

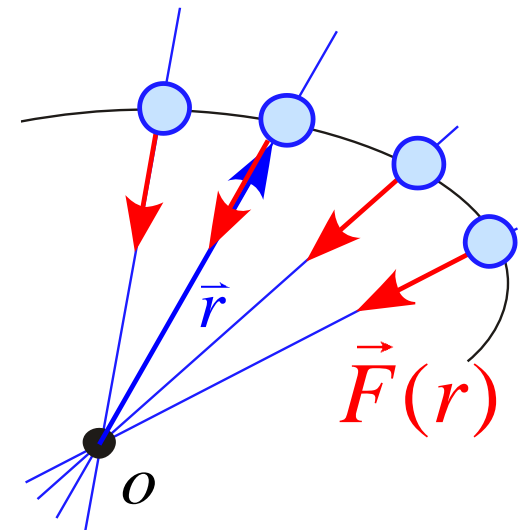
$$F > 0$$

(斥力)



$$F < 0$$

(引力)



# 中心力～角運動量保存

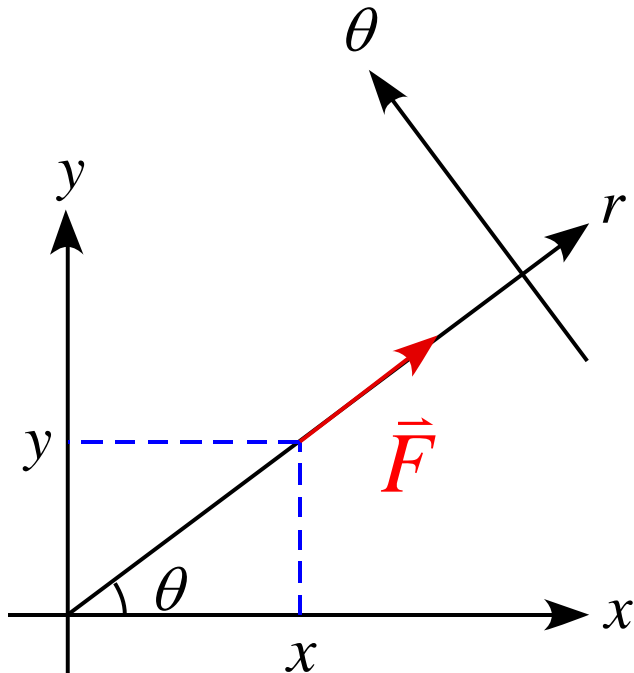
角運動量の変化を計算すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) \\
 &= m \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v} + m\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} \\
 &= m\vec{v} \times \vec{v} + \vec{r} \times \vec{F} \\
 &= 0 + \vec{r} \times \left[ F \frac{\vec{r}}{r} \right] \leftarrow \text{中心力} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

従って、**中心力が働く運動では角運動量が保存する**

# 中心力～運動方程式

運動方程式から考えるとする  
極座標表示を使用する



中心力は

$$r \text{ 方向: } F_r = F$$

$$\theta \text{ 方向: } F_\theta = 0$$

と表される

従って、運動方程式は

$$ma_r = F$$

$$ma_\theta = 0$$

と表される

ここで、 $a_r, a_\theta$  は

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

$$a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表されるので、

# 中心力～運動方程式

従って、運動方程式は

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = F$$

← 動径方向の運動方程式

$$m \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

← 偏角(方位角)方向の運動方程式

と表される

# 中心力～運動方程式

ここで、 $\theta$  方向の式が何を示しているか  
検討してみよう

変位は

$$x(t) = r \cos \theta$$

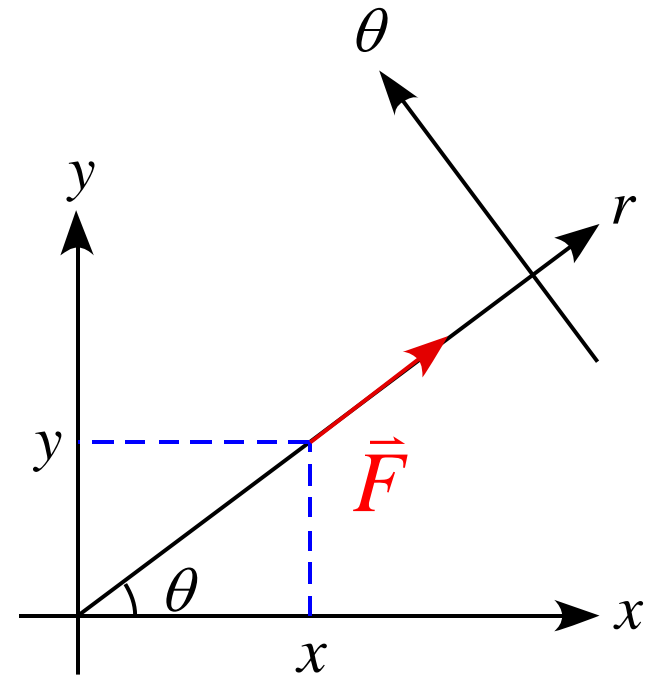
$$y(t) = r \sin \theta$$

である。  
速度は

$$v_x = \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$v_y = \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt}$$

と表される



ここで、角運動量  $\vec{L}$  は

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

であるから

# 中心力～運動方程式

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} y \cdot 0 - 0 \cdot p_y \\ 0 \cdot p_x - x \cdot 0 \\ x \cdot p_y - y \cdot p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ xp_y - yp_x \end{pmatrix}$$

$$|\vec{L}| = L = \sqrt{0^2 + 0^2 + (xp_y - yp_x)^2} = xp_y - yp_x$$

と表される

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix}$$

# 中心力～運動方程式

従って、

$$L = xp_y - yp_x$$

$$= xmv_y - ymv_x$$

$$= r \cos \theta \cdot m \left[ \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \right] - r \sin \theta \cdot m \left[ \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \right]$$

$$= rm \frac{dr}{dt} \cos \theta \sin \theta + r^2 m \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} - rm \frac{dr}{dt} \sin \theta \cos \theta + r^2 m \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m \cos^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + r^2 m \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt}$$

$$= r^2 m \frac{d\theta}{dt} (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)$$

$$= r^2 m \frac{d\theta}{dt}$$

と表される

# 中心力～運動方程式

従って、 $\theta$  方向の式において

$$m \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} \right] = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left( mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left( mr^2 \frac{d\theta}{dt} \right) = 0$$

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

となる

即ち、

$$ma_{\theta} = 0$$

は角運動量保存則を表している



# 角運動量～例題

## 例題

質量  $m$  の質点が  $xy$  平面で半径  $r_0$  の円運動している。

$t = 0$  で  $(x, y) = (r_0, 0)$  にあり、反時計まわりに角速度  $\omega$  で回転するとする。

1. 運動量  $\vec{p} = (p_x, p_y)$  を求めよ。
2. この運動における質点の角運動量  $\vec{L}$  を求めよ。

# 円運動～等速円運動

半径  $r_0$  角速度  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  (一定) の等速円運動

ある時刻  $t$  での位置は  
 $t = 0$  で  $(x, y) = (r_0, 0)$  とすると

$$x(t) = r_0 \cos \omega t$$

$$y(t) = r_0 \sin \omega t$$

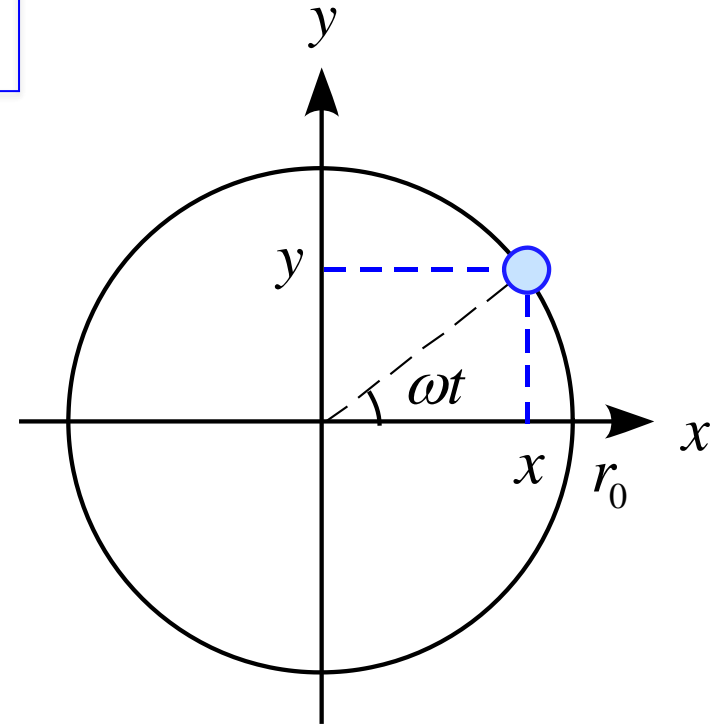
と表される。

速度は

$$v_x = \frac{d}{dt} [r_0 \cos \omega t] = -r_0 \omega \sin \omega t$$

$$v_y = \frac{d}{dt} [r_0 \sin \omega t] = r_0 \omega \cos \omega t$$

と表される。

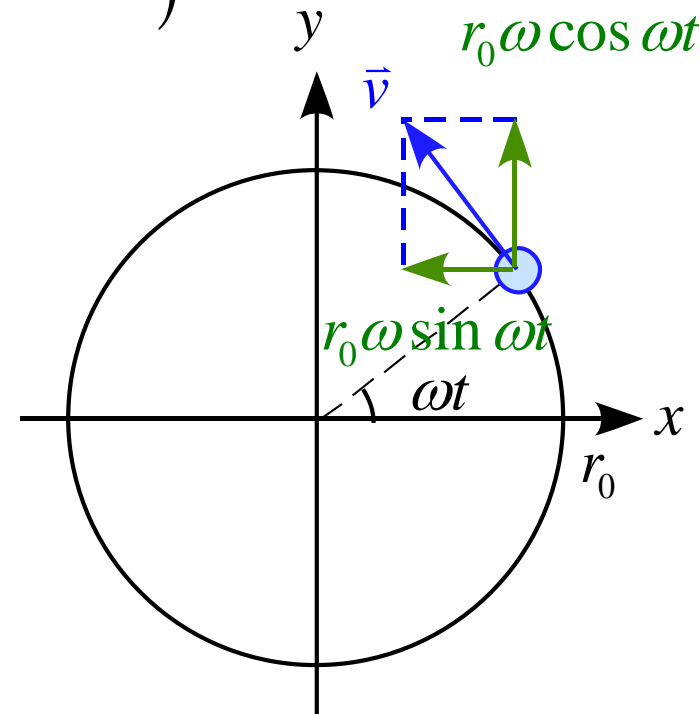


# 円運動～等速円運動

従って、

$$\begin{aligned}
 |\vec{v}| &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-r_0\omega \sin \omega t)^2 + (r_0\omega \cos \omega t)^2} \\
 &= \sqrt{r_0^2\omega^2 \sin^2 \omega t + r_0^2\omega^2 \cos^2 \omega t} \\
 &= \sqrt{r_0^2\omega^2 (\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t)} \\
 &= \sqrt{r_0^2\omega^2} \\
 &= r_0\omega
 \end{aligned}$$

となる。



# 円運動～等速円運動

加速度は

$$a_x = \frac{d}{dt}[-r_0 \omega \sin \omega t] = -r_0 \omega^2 \cos \omega t$$

$$a_y = \frac{d}{dt}[r_0 \omega \cos \omega t] = -r_0 \omega^2 \sin \omega t$$

と表される。

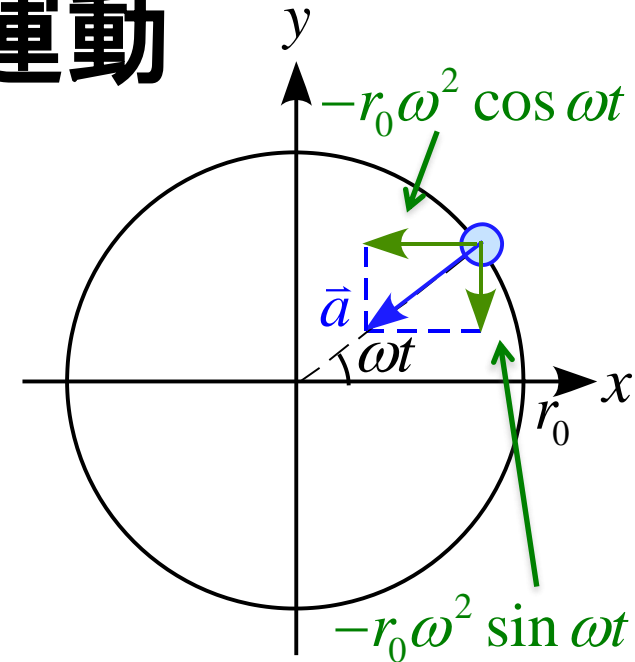
$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-r_0 \omega^2 \cos \omega t)^2 + (-r_0 \omega^2 \sin \omega t)^2}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t + r_0^2 \omega^4 \sin^2 \omega t}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4 (\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t)}$$

$$= \sqrt{r_0^2 \omega^4} = r_0 \omega^2$$

となる。

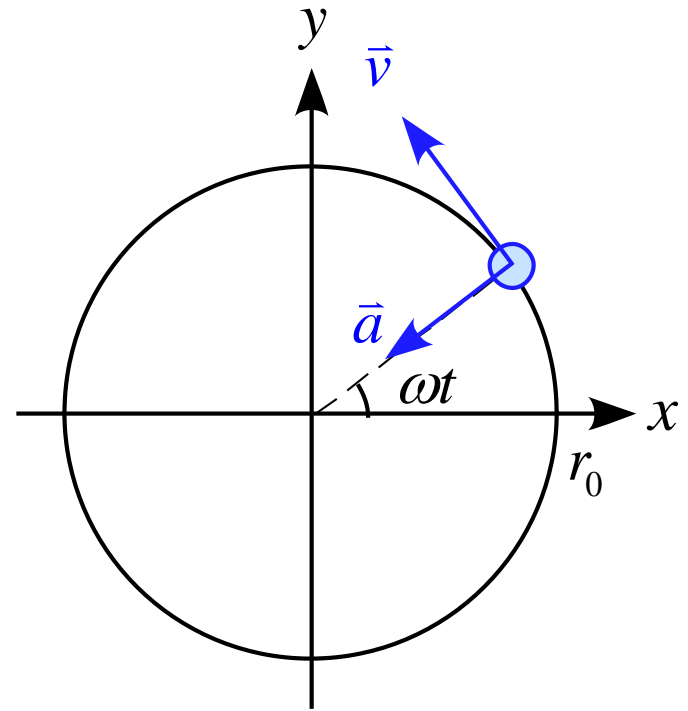


# 円運動～等速円運動

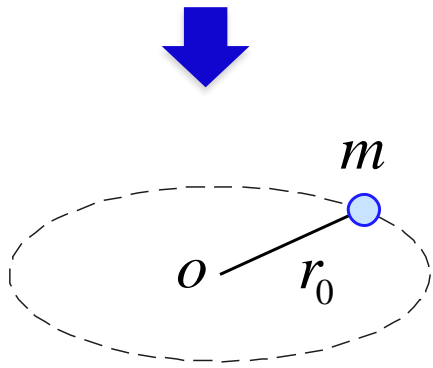
等速円運動  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  (一定)

$$|\vec{v}| = v = r_0 \omega$$

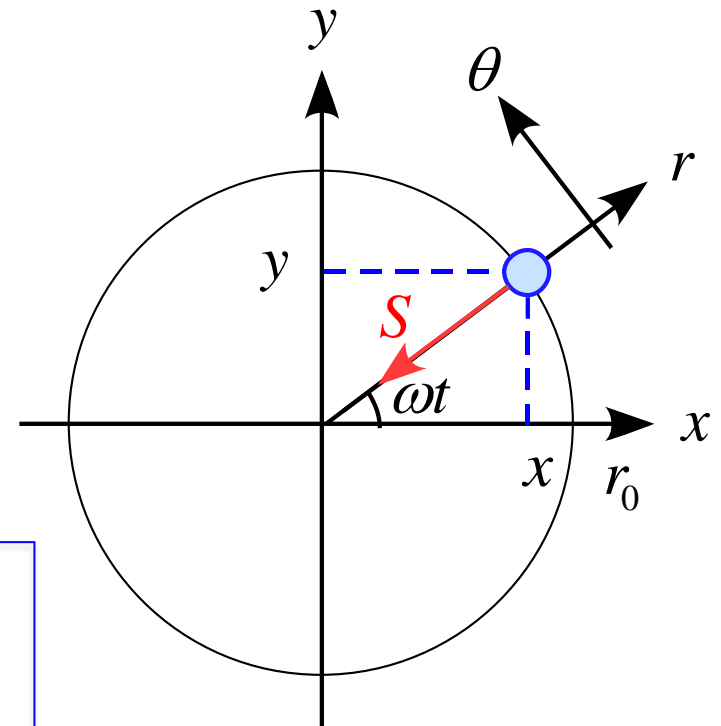
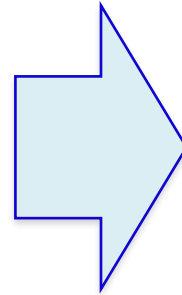
$$|\vec{a}| = a = r_0 \omega^2 = v\omega = \frac{v^2}{r_0}$$



# 円運動～運動方程式



真上から見る



一般的な極座標表示 (加速度)

$$a_r = \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right]$$

$$a_\theta = \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right]$$

運動方程式

$$ma_r = -S$$

$$ma_\theta = 0$$



$a_r, a_\theta$   
に代入

$$m \left[ \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] = -S$$

$$m \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2} \right] = 0$$

# 円運動～運動方程式

糸の長さは  $r = r_0$  (一定) なので  $\frac{dr}{dt} = 0$

$$mr_0 \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = S$$

$$mr_0 \frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$$

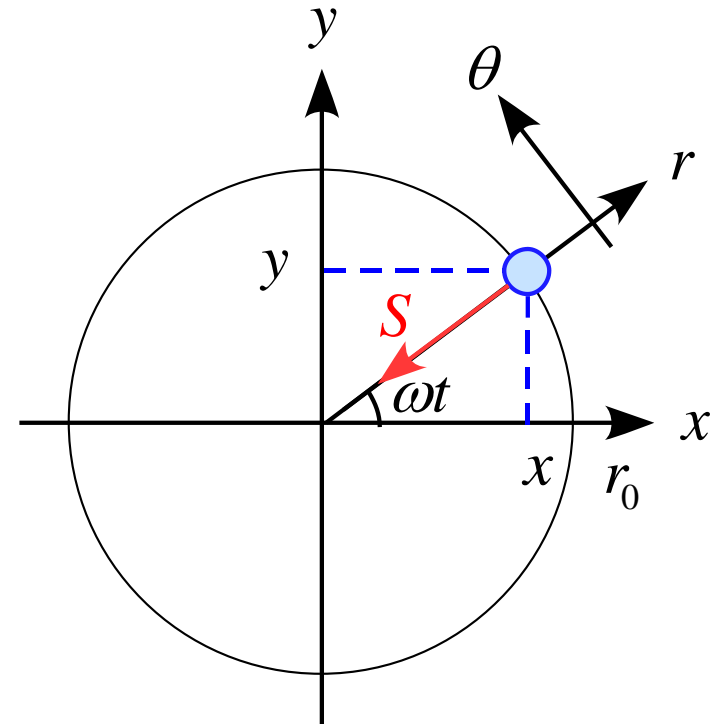
角速度  $\frac{d\theta}{dt} = \omega$  (一定) の等速円運動

とすると、

$$mr_0 \omega^2 = S$$

$$ma = S$$

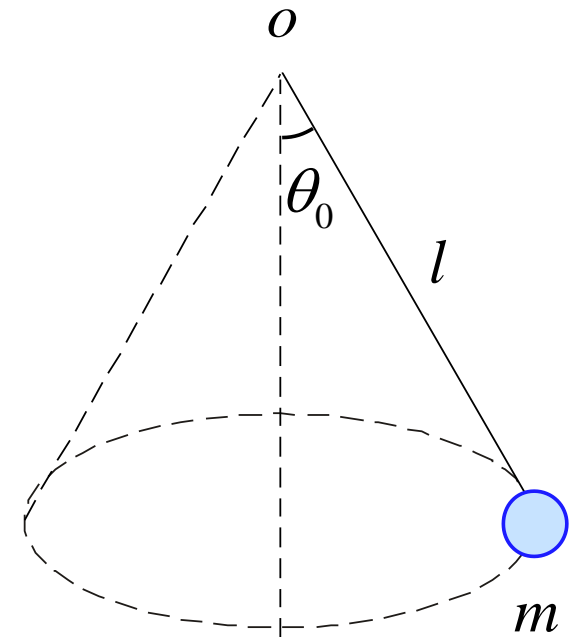
中心方向に加速度があると考えられる



# 円運動～例題

## 例題

図のような円錐振り子のモデルを考える。  
 糸の長さは  $l$ 、物体の質量は  $m$  である。  
 物体は水平面内で円運動していて、糸と鉛直線のなす角は  $\theta_0$  であるとする。  
 以下の問いに答えよ。



1. 水平面に垂直な軸を取り、運動方程式を記述せよ。
2.  $r$  方向、 $\theta$  方向の加速度を  $a_r, a_\theta$  としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
3. 一般的に、平面極座標において

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \quad a_\theta = 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

と表すことができる。

糸の張力  $S$ 、物体の速さ  $v$ 、回転の周期  $T$  を求めよ。



# 円運動～例題

## 例題

図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは  $l$ 、物体の質量  $m$  はである。

物体を水平を状態にして放し、円運動させたとする。

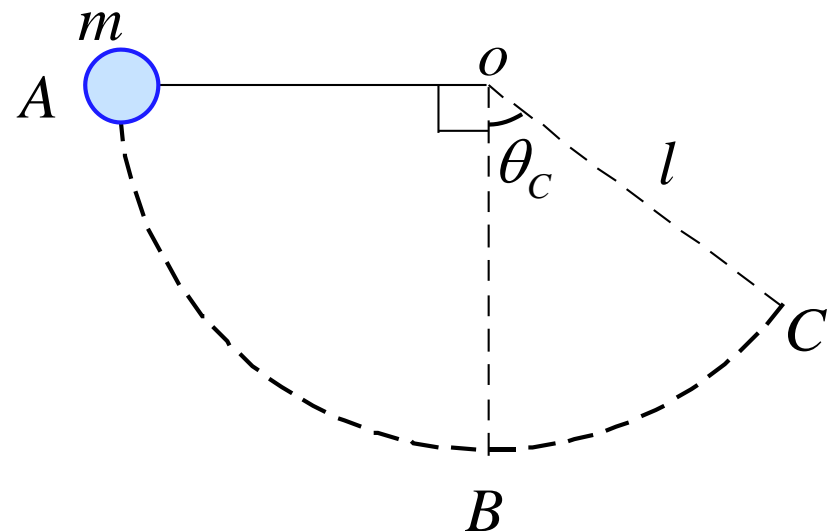
以下の問に答えよ。

ある時刻  $t$  で糸と鉛直線のなす角を  $\theta$  として用いてよい。

1.  $r$  方向、 $\theta$  方向の加速度を  $a_r, a_\theta$  としたとき、  
それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。

2. 最下点  $B$  での糸の張力  $T_B$  を求めよ。

3. 点  $C$  での鉛直線となす角を  $\theta_C$  とする。  
糸の張力  $T_C$  を求めよ。



# 円運動～例題

## 例題

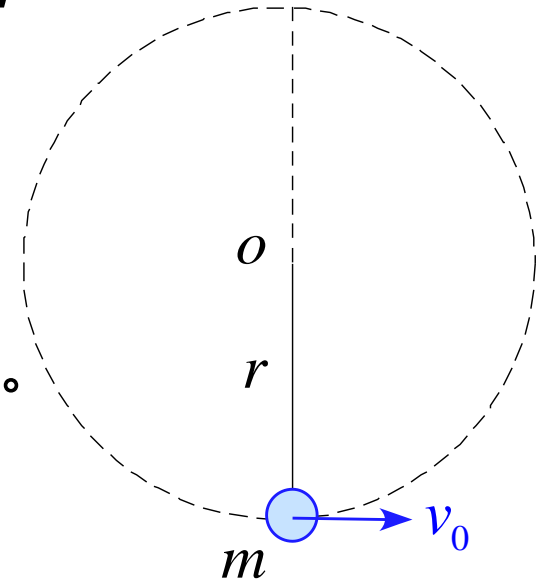
図のような円運動のモデルを考える。

糸の長さは  $r$ 、物体の質量は  $m$  である。

最下点で水平方向に初速度  $v_0$  を与えたとき

以下の問に答えよ。

ある時刻  $t$  で糸と鉛直線のなす角を  $\theta$  として用いてよい。



1.  $r$  方向、 $\theta$  方向の加速度を  $a_r, a_\theta$  としたとき、それぞれの方向の運動方程式を記述せよ。
2. 物体が1回転するために必要な初速度  $v_0$  の条件を求めよ。

# 運動方程式から導かれる関係

運動方程式  $m\vec{a} = \vec{F}$

$\vec{r}$  で積分

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

仕事とエネルギーの関係

左側から  $\vec{r}$  で外積

$t$  で積分

モーメントと角運動量の関係

力積と運動量の関係

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

角運動量

モーメント

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

# 力学の問題を考える手順

① 作図をする

まず、モデルの設定の図を書く

② 軸を設定する

- ・問題文で指定されている場合はそれを利用する
- ・指定が無い場合は自分で都合の良い方向を正とする
- ・一般的には運動の進行方向を正にとると良いことが多い
- ・直線的な運動は1つ、平面的は2つ、立体的は3つの軸を設定する

③ 物体に作用する力の矢印を書き込む

力の見つけ方の手順は

1. 場の力 (主に重力)
2. 接触力
3. 慣性力

の順で探し出す

④ 運動方程式を軸ごとに立てる

設定した軸の向きに注意しながら  
 $ma = F$  の  $F$  の部分を書き込む

# 力学の問題を考える手順

運動方程式を立てる

解ける



$$m \frac{dv}{dt} = F$$



$$v = \text{○}$$



$$x = \text{○}$$



解くことが困難  
解く必要が無い

$$\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$$

$t$  で積分

$t$  で積分

積分定数は初期条件が決める

速度、変位を求める

どの物理量の関係が必要か検討する

$t$  で積分

$\vec{r}$  で積分

左側から  $\vec{r}$  で外積

仕事とエネルギーの関係

$$\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

モーメントと角運動量の関係

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \vec{r} \times \vec{F}$$

回転の運動方程式

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

力積と運動量の関係

$$\vec{p}_B - \vec{p}_A = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt$$

# 力学の講義を終えて

## 取り扱った内容

- ・加速度 / 速度 / 変位
- ・万有引力の法則
- ・ニュートンの運動の法則
- ・仕事とエネルギー
- ・エネルギー保存則
- ・運動量と力積
- ・運動量保存則
- ・力のモーメント
- ・角運動量
- ・角運動量保存則
- ・円運動

## 取り扱っていない内容

- ・単振動 / 単振り子
- ・ケプラーの法則
- ・剛体の運動
- ・慣性モーメント