力学

・高校の時に覚えた公式は一旦忘れる。

場合分けされた公式は
覚えると害が出る

新しく使える道具

速度

$$v = \frac{dx}{dt}$$

加速度

$$a = \frac{dv}{dt}$$

（定義式）

力学＝運動を表す

力が作用

$$ma = F$$ （運動方程式） (ニュートンが見つけた法則)

次元解析

[L] と [M] と [T]
長さ　質量　時間

を使って、それぞれの物理量を表すこと

・その物理量の構成がわかる
・その物理量の単位がわかる

運動方程式は万能だ！

$$ma = F$$

質量と加速度をかけたものが
その物体に作用する力の合計である

$$ma = F \Leftrightarrow m\frac{dv}{dt} = F$$

両辺に速度 $v = \dfrac{dx}{dt}$ をかけると

$$mv\frac{dv}{dt} = F\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}_{\text{運動エネルギー}} = \frac{d}{dt}\underbrace{(Fx)}_{\text{仕事}}$$

次元解析

$$\underbrace{[M]}_{\text{質量}}\underbrace{\frac{[L]}{[T^2]}}_{\text{加速度}} = \underbrace{\frac{[ML]}{[T^2]}}_{\text{力}}$$

この式変形は、「知っている」で
使って良いが、間違っていないか
確認をすること

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = \frac{1}{2}m\cdot 2v\cdot v'$$

$$= m\cdot v\cdot\frac{dv}{dt}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}(mv) = F$$

ニュートンが最初に提唱した形

運動量

次元解析

$$[M]\frac{[L]}{[T]} = \frac{[ML]}{[T]}$$

質量　速度　運動量

式の意味

運動量の時間変化 ＝ 作用する力

・運動量が変化すれば、力が作用したはずである。
・力が作用すれば、運動量が変化する。

$$\frac{d}{dt}(p) = F$$

$$dp = Fdt$$

力積

次元解析

$$\left[\frac{ML}{T^2}\right][T] = \frac{[ML]}{[T]}$$

力　時間　力積

2. (期末)

$$v = 7 + 12t + 6t^2$$

$$x(0) = 5$$

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}}$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(7 + 12t + 6t^2\right) = 12 + 12t$$

$t = t_1$ の時なので、

$$a(t_1) = 12 + 12t_1 \ [\mathrm{m/s^2}]$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} \Leftrightarrow \frac{dx}{dt} = v \qquad x = \int v dt$$

x は t で微分されている ⇨ t で積分すれば x が求まる

$$\boxed{\int \quad dt}$$

具体的には

$$\frac{dx}{dt} = v$$

$$\int \frac{dx}{dt} dt = \int v dt$$

$$\int dx = \int v dt$$

$$x = \int v dt$$

$$x = \int \left(7 + 12t + 6t^2\right) dt$$

$$x = 7t + 12t^2 \cdot \frac{1}{2} + 6t^3 \cdot \frac{1}{3} + C$$

$$x = 7t + 6t^2 + 2t^3 + C$$

積分定数は<u>初期条件</u>が決める

$$x(0) = 5$$

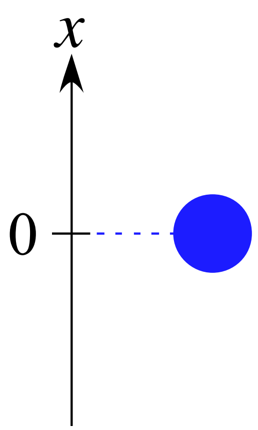
$$x(0) = 7 \cdot 0 + 6 \cdot 0^2 + 2 \cdot 0^3 + C = 5$$

$$C = 5$$

$$x(t) = 7t + 6t^2 + 2t^3 + 5 \ [\mathrm{m}]$$

単位が記述されている問題では
必ず単位まで記述する

10. (期末)　自由落下



・作図は丁寧に！

問題で軸の設定はどうなっているか？

問題で設定されていなければ、
自分の都合が良いように設定する

この問題では、上向きが正に
軸が設定されている

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg$$

注）向き、正負が重要！

この運動方程式からエネルギー保存則を導く

テクニックが必要

$$a = \frac{dv}{dt}$$ と書き換える

$$v = \frac{dx}{dt}$$ を両辺にかける

$$ma = -mg$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg$$

$$mv\frac{dv}{dt} = -mg\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{d}{dt}(-mgx)$$

この式変形は、「知っている」で使って良いが、間違っていないか確認をすること

$$\left(\frac{1}{2}mv^2\right)' = \frac{1}{2}m \cdot 2v \cdot v'$$

$$= m \cdot v \cdot \frac{dv}{dt}$$

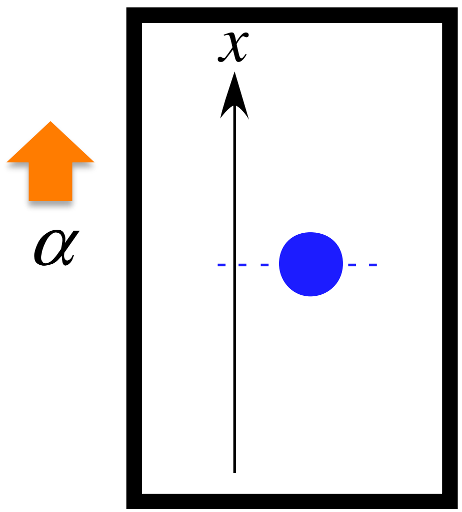
$$\frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2}mv^2 + mgx}_{\text{力学的エネルギー}}\right) = 0$$

( ) の中を t で微分したらゼロ

( ) の中は t に対して定数であるはず

力学的エネルギーが時間変化しないので保存している

3. (中テスト)　(1) エレベータ内



何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力 ・・・ mg

・接触力 ・・・ 無し

・慣性力 ・・・ $m\alpha$

慣性力は進行方向と逆向きに

(エレベータ)

$\boxed{\text{運動する物体の質量}} \times \boxed{\text{動いている座標の加速度}}$

m　　　α

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (上向き正)

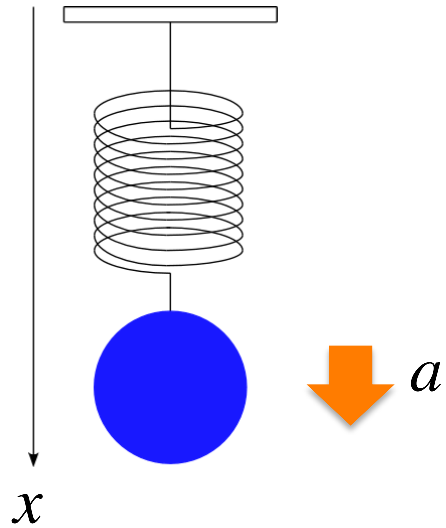
1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg - m\alpha$$

注）向き、正負が重要！

3. (中テスト) (2) 吊るしたバネ



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・場の力 ・・・ mg

・接触力 ・・・ kx

・慣性力 ・・・ 無し

2. 軸の設定を確認する

問題で設定されている (下向き正)

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

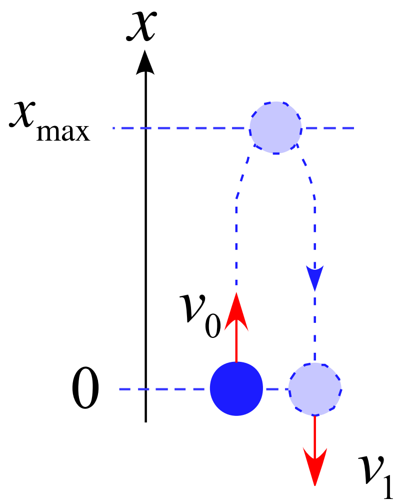
1. とりあえず左辺に ma と書く

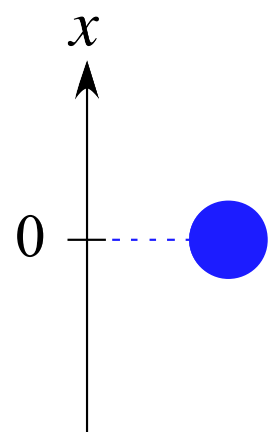
2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = mg - kx$$

注) 向き、正負が重要！

12. (期末)　鉛直投げ上げ





・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む
2. 軸の設定を確認する
3. 初期条件を書き出す

$v(0) = v_0$ （上向き正）

$x(0) = 0$

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

1. とりあえず左辺に ma と書く

2. 物体に作用している力を軸に合わせて右辺に書き加える

$$ma = -mg$$

注）向き、正負が重要！

この式から $v(t), x(t)$ を求める

$$ma = -mg$$
$$a = -g$$

g は一定だから加速度が一定であり
等加速度運動である

しかし、等加速度運動の公式は忘れた

$$\boxed{a = \frac{dv}{dt}} = -g$$

t で積分

$$v = -gt + C$$

積分定数を
忘れない

積分定数は初期条件が決める

$$v(0) = -g \cdot 0 + C = v_0$$
$$C = v_0$$
$$v(t) = -gt + v_0$$

$$\boxed{v = \frac{dx}{dt}} = -gt + v_0$$

t で積分

$$x = -gt^2 \cdot \frac{1}{2} + v_0 t + C'$$

積分定数を
忘れない

$$x = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t + C'$$

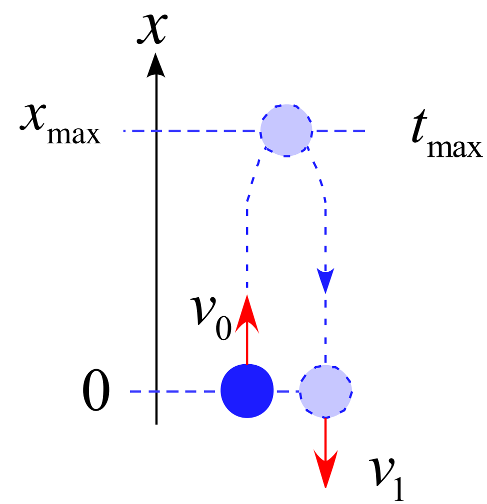
$$x(0) = -\frac{1}{2} g \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C' = 0$$
$$C' = 0$$
$$x(t) = -\frac{1}{2} gt^2 + v_0 t$$

最高点 ⇨ $v=0$ となる点

$$\boxed{v(t_{\max})=0}$$

$$v(t_{\max})=-gt_{\max}+v_0=0$$

$$t_{\max}=\frac{v_0}{g}$$



その時の位置は

$$x_{\max}=x\left(t_{\max}\right)=-\frac{1}{2}gt_{\max}^2+v_0t_{\max}$$

$$=-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+v_0\frac{v_0}{g}$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}+\frac{v_0^2}{g}$$

$$=\frac{v_0^2}{2g}$$

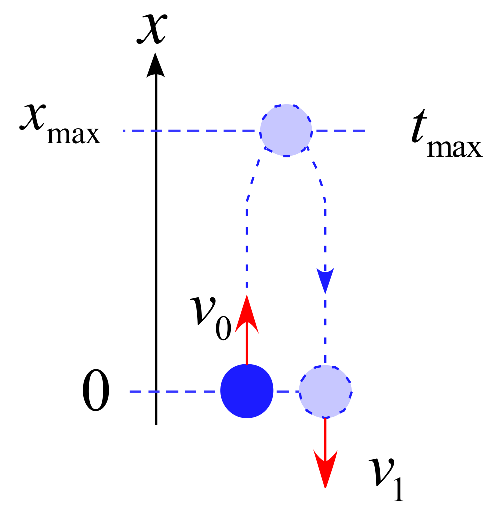
再び戻って来た　$x=0$ に来た

$$x(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

この式の $x=0$ になる t を求める

$$x(t) = t\left(-\frac{1}{2}gt + v_0\right)$$

原点　　戻って来た時



戻って来た時の時刻は

$$-\frac{1}{2}gt + v_0 = 0$$

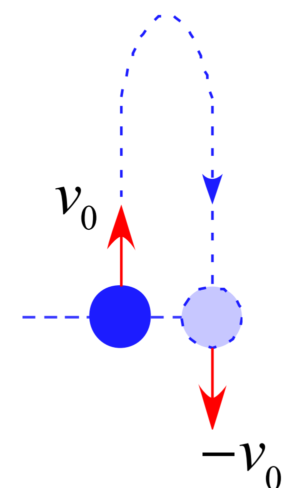
$$t = \frac{2v_0}{g}$$

この時刻の速度を
求めればよい

$$v = -g\frac{2v_0}{g} + v_0$$

$$= -2v_0 + v_0$$

$$= -v_0$$



これは何を意味するか？

鉛直に v_0 で投げ上げると、

ちょうどスタート地点にも戻って来た時の

速度は大きさが同じで逆向きになる

力学的エネルギー $E(t) = K(t) + U(t)$

運動エネルギー $K(t) = \frac{1}{2}mv^2$

位置エネルギー $U(t) = mgx$

それぞれ計算すると

$$K(t) = \frac{1}{2}m\left(-gt + v_0\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}m\left(g^2t^2 + v_0^2 - 2gtv_0\right)$$

$$= \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m \cdot 2gtv_0$$

$$= \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0t$$

$$U(t) = mg\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0t\right)$$

$$= -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$

力学的エネルギー $E(t) = K(t) + U(t)$ であるから

$$E(t) = K(t) + U(t)$$

$$= \frac{1}{2}mg^2t^2 + \frac{1}{2}mv_0^2 - mgv_0t - \frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t$$

$$= \frac{1}{2}mv_0^2$$

m, v_0 は定数なので $E(t)$ は定数である。

従って力学的エネルギーは時間に依らず一定である。

力学的エネルギー　$E(t)=K(t)+U(t)=\frac{1}{2}mv_0^2$

運動エネルギー　$K(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t$

位置エネルギー　$U(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$

それぞれをグラフにする

まずはザックリ見てみよう

$E(t)=\frac{1}{2}mv_0^2$　一定

$K(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t$

2次関数 

$t=0$ で $K=\frac{1}{2}mv_0^2$

$U(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$

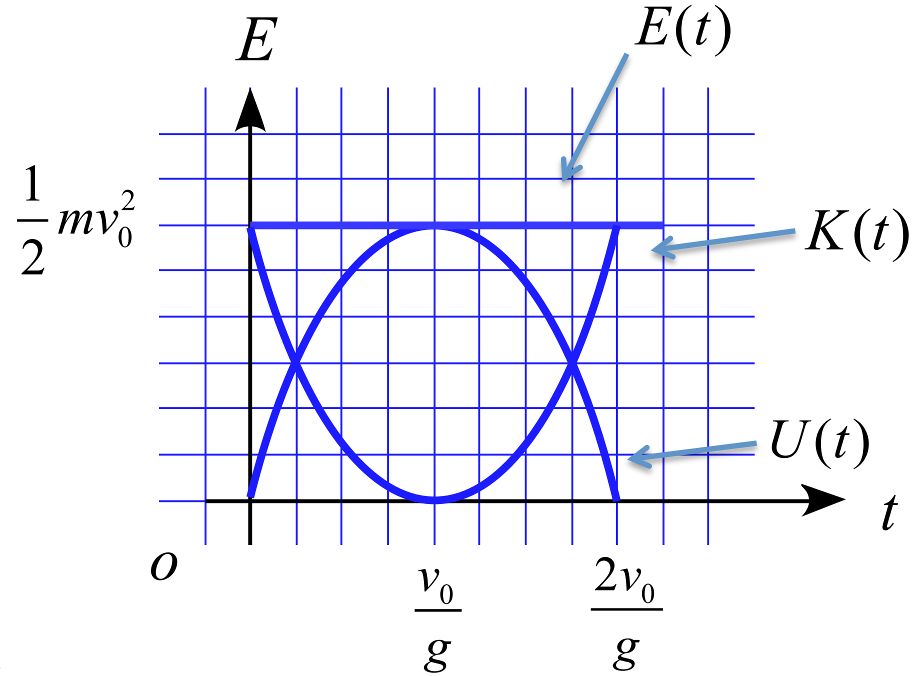
2次関数 

$t=0$ で $U=0$

Start地点 ($t=0$) では

$$v(0)=v_0 \qquad K=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$U=0$$



最高点では

$$v(t_{\max})=0 \qquad K=0$$

$$t_{\max}=\frac{v_0}{g} \qquad U(t)=-\frac{1}{2}mg^2t^2+mgv_0t$$

$$=-\frac{1}{2}mg^2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+mgv_0\frac{v_0}{g}=\frac{1}{2}mv_0^2$$

戻ったときは

$$v(t_{RE})=-v_0 \qquad K=\frac{1}{2}m(-v_0)^2=\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$t_{RE}=\frac{2v_0}{g} \qquad U=0$$

これらの情報だけで
グラフは書くことができる

数学的にみると

$$K(t)=\frac{1}{2}mg^2t^2+\frac{1}{2}mv_0^2-mgv_0t$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left(t^2-\frac{2v_0}{g}t\right)+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t^2-\frac{2v_0}{g}t+\frac{v_0^2}{g^2}\right)-\frac{v_0^2}{g^2}\right\}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2-\frac{v_0^2}{g^2}\right\}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2-\frac{1}{2}mg^2\frac{v_0^2}{g^2}+\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$=\frac{1}{2}mg^2\left(t-\frac{v_0}{g}\right)^2$$

頂点 $\left(\frac{v_0}{g},\ 0\right)$ $t=0$ で $K=\frac{1}{2}mv_0^2$

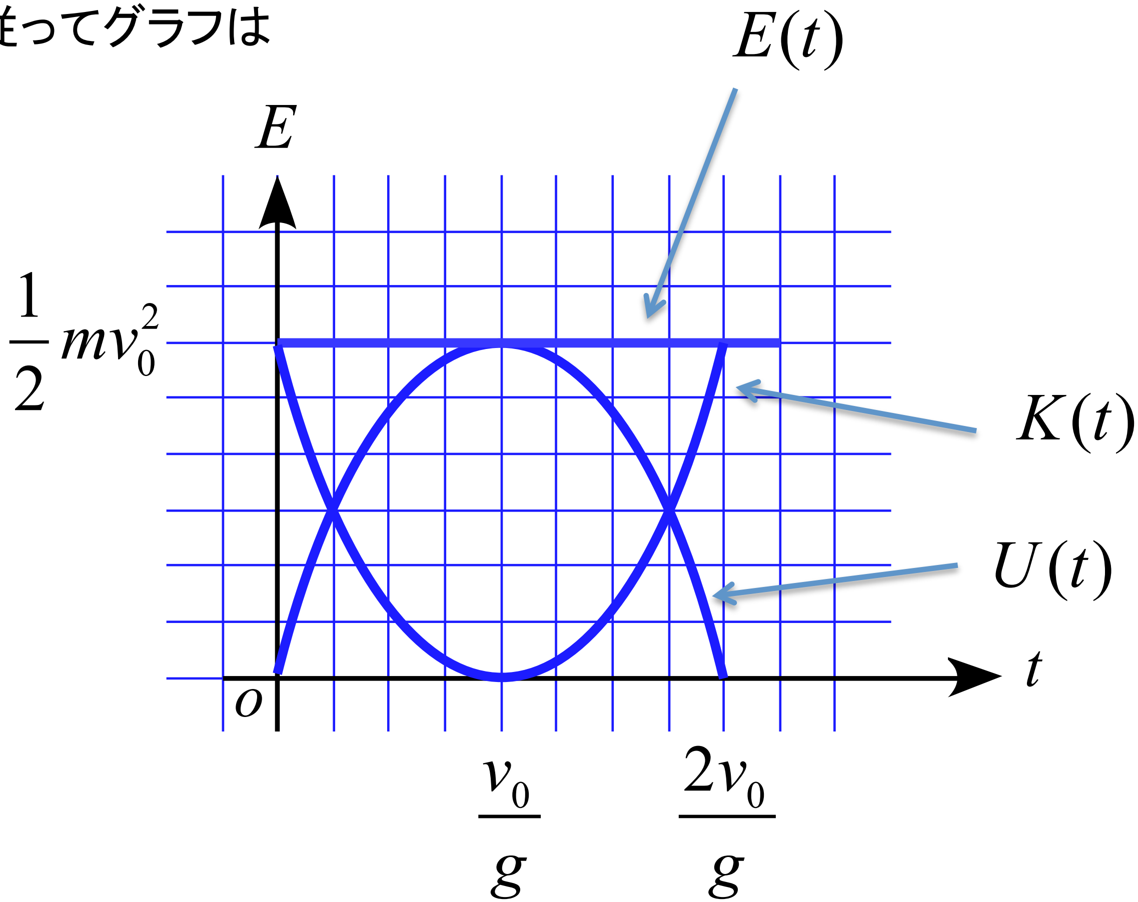
$$
\begin{aligned}
U(t) &= -\frac{1}{2}mg^2t^2 + mgv_0t \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t\right) \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t^2 - \frac{2v_0}{g}t + \frac{v_0^2}{g^2}\right) - \frac{v_0^2}{g^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left\{\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 - \frac{v_0^2}{g^2}\right\} \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}mg^2\frac{v_0^2}{g^2} \\
&= -\frac{1}{2}mg^2\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_0^2
\end{aligned}
$$

頂点 $\left(\frac{v_0}{g}, \frac{1}{2}mv_0\right)$

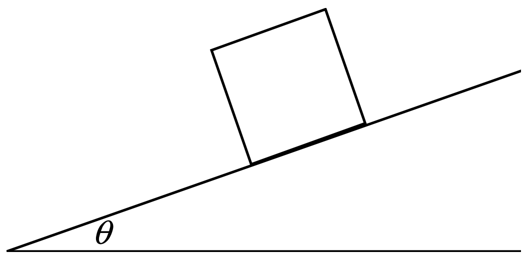
$t=0$ で

$$U(0)=-\frac{1}{2}mg^2\left(\frac{v_0}{g}\right)^2+\frac{1}{2}mv_0^2=0$$

従ってグラフは



13. (期末)　斜面を滑り降りる物体



・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む
2. 軸の設定を確認する

運動の方向に合わせたほうが都合が良い

斜面に平行に
斜面に垂直に

軸と違う方向を向いている力は
分解して軸にそろえる

3. 初期条件を書き出す

何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

軸ごとに運動方程式を立てる

$$ma_x = mg\sin\theta - f$$

$$ma_y = N - mg\cos\theta$$

注）向き、正負が重要！

次にそれぞれの条件を適用する

$$f = \mu_k N \quad \Rightarrow \quad ma_x = mg\sin\theta - \mu_k N$$

斜面から飛び出ない $\Rightarrow$ $a_y = 0$

$$m \cdot 0 = N - mg\cos\theta$$

$$N = mg\cos\theta$$

$$ma_x = mg\sin\theta - \mu_k mg\cos\theta$$

等加速度運動を示す $\Rightarrow$ $a_x =$ ◯ ← これが時間に依らないことを示せばよい

$$a_x = g\sin\theta - \mu_k g\cos\theta$$

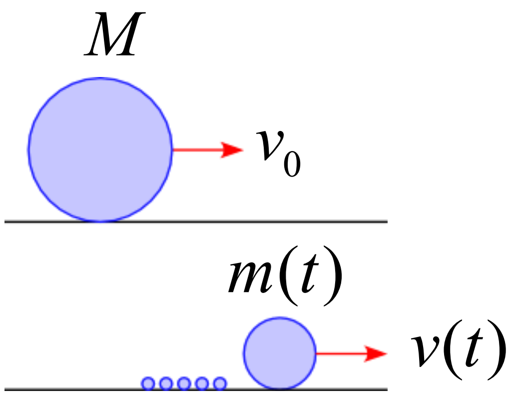
g, μ_k, θ は定数なので a_x は時間に依らず一定である。

従って、この運動は等加速度運動である。

11. (期末)　運動量保存則

最初の状態

t 後の状態



何はともあれ、運動方程式

$$\boxed{ma = F}$$

$$m\frac{dv}{dt} = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(mv\right) = F$$

$$\frac{d}{dt}\left(mv\right) = 0$$

進行方向軸に
作用している力は無し

・作図は丁寧に！

1. 図に作用する力を書き込む

・重力　mg
・垂直抗力　N

これらの力は
進行方向には作用していない

2. 軸の設定を確認する

普通は進行方向を正にする

なぜ m を ( ) の中に入れるか？

m も t で変化するから

つまり、mv が時間的変化していない

運動量が保存している

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{運動量}\\ \text{Start 時}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{運動量}\\ \text{t 秒後}\end{array}}$$

単位時間あたり m_0 減る

t秒後　$m_0 \times t$ 減る

$$m(t) = M - m_0 t$$

Start時　M　速度 v_0

t秒後　$M - m_0 t$　速度 $v(t)$

$$Mv_0 = m(t)v(t)$$

$$Mv_0 = \left(M - m_0 t\right)v(t)$$

$$v(t) = \frac{M}{M - m_0 t} v_0$$

（≥ 1 速くなった）

$\boxed{v = \dfrac{dx}{dt}}$ を使う

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{M}{M - m_0 t} v_0$$

t で積分

$$v(t) = \int \frac{dx}{dt} dt = \int \frac{M}{M - m_0 t} v_0 dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{Mv_0}{M - m_0 t} dt$$

$$\int_0^{x(t)} dx = \int_0^t \frac{Mv_0}{M - m_0 t} dt$$

$$x(t) = Mv_0 \int_0^t \frac{1}{M - m_0 t} dt$$

$$= Mv_0 \frac{1}{-m_0} \Big[\log\big(M - m_0 t \big) \Big]_0^t$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0} \Big\{ \log\big(M - m_0 t \big) - \log M \Big\}$$

$$= -\frac{Mv_0}{m_0} \log \frac{M - m_0 t}{M}$$

電磁気学

・理解したいポイント

- ・クーロン力
- ・ガウスの法則
- ・回路方程式

クーロン力

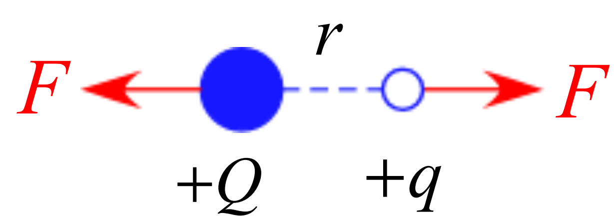
大きさ

$$|F| = \left| k\frac{Qq}{r^2} \right|$$

向きは

同符号・・・斥力
異符号・・・引力

（２点を結ぶ直線上）



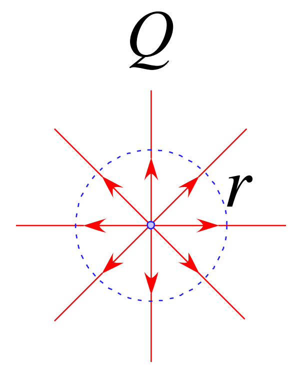
電場 ・・・ 1［Ｃ］当たりの力

$$E = k\frac{Q}{r^2}$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$$

ガウスの法則

$$N = \boxed{E_n S = \frac{Q}{\varepsilon_0}}$$



ガウスは目に見えない電気力線を本数で表した

$$N = E_n \cdot S$$

全本数　　電場×面積

電気力線は電荷によって出る本数が決まっている

（電気量）

$$N = E_n S$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

前の式と合わせると電気量 Q から出る電気力線の本数は

$$N = \boxed{E_n S = \frac{Q}{\varepsilon_0}} \quad [\text{本}]$$

ガウスの法則

この関係式が何に使えるか？

⇒ 電場が求められる

回路方程式

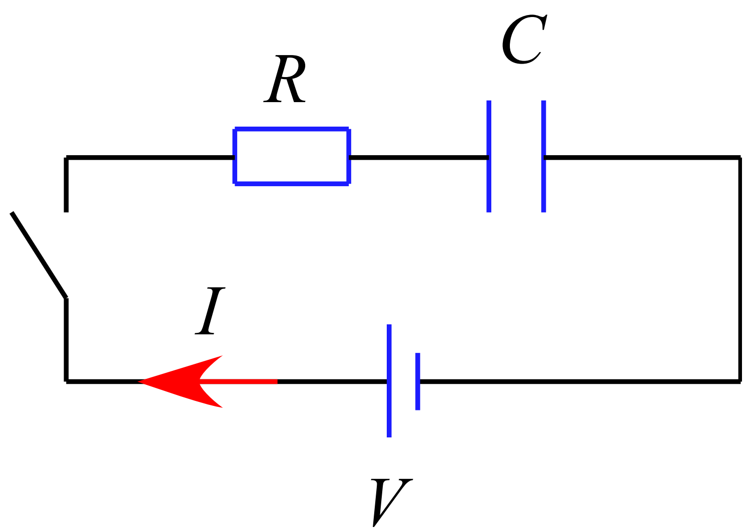
閉回路ひと回りについて電圧の変化に関する式

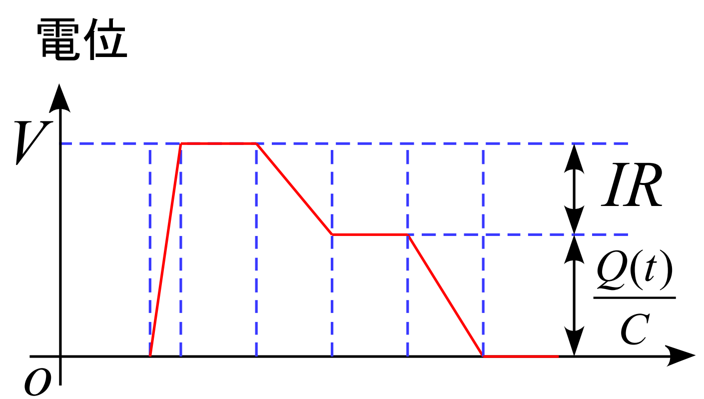
・電池 ・・・ V （起電力） 電圧を上げる

・抵抗 ・・・ $V = IR$ （オームの法則）

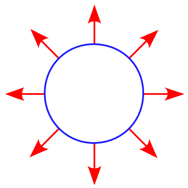
・コンデンサー ・・・ $Q = CV$ ⇒ $V = \dfrac{Q}{C}$

電圧を下げる





16. 期末 (一部 中テスト)



E_n は面を垂直に貫かなければならない

閉曲面が球なら放射状に
なるので垂直に貫いている

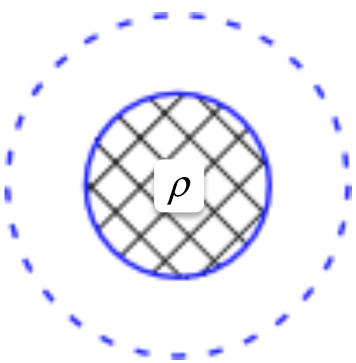
電気量 Q はいくらか？

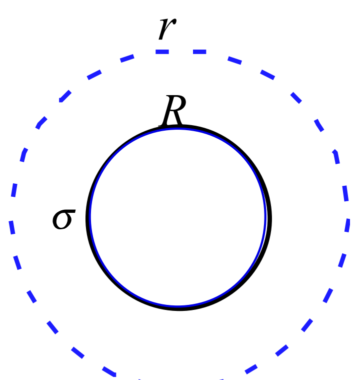
密度

A: 球の体積全体に分布 ・・・ ρ

B: 球の表面に分布 ・・・ σ

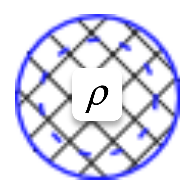
$r \geq R$

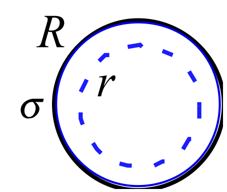




$$Q_A = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho \qquad Q_B = 4\pi R^2 \cdot \sigma$$

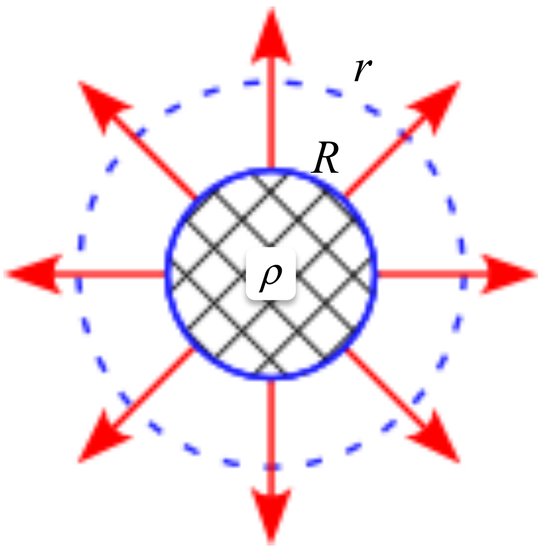
$r \leq R$

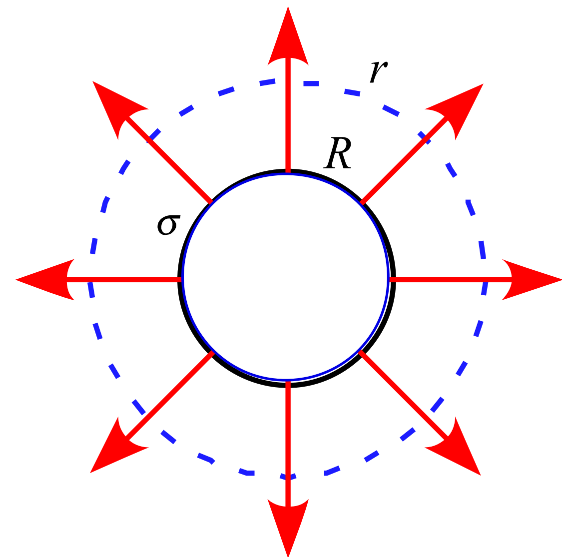




$$Q_A = \frac{4}{3}\pi r^3 \cdot \rho \qquad Q_B = 0$$

$r \geq R$





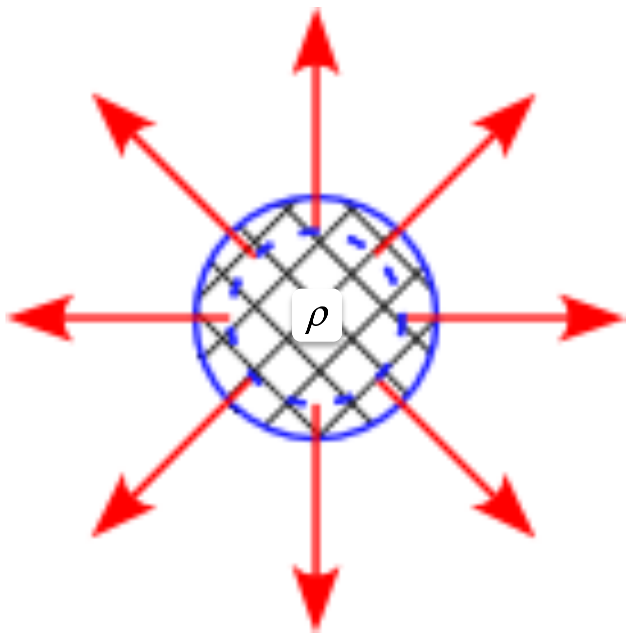
$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\frac{R^3}{r^2}$$

$$E(r) \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot 4\pi R^2 \sigma$$

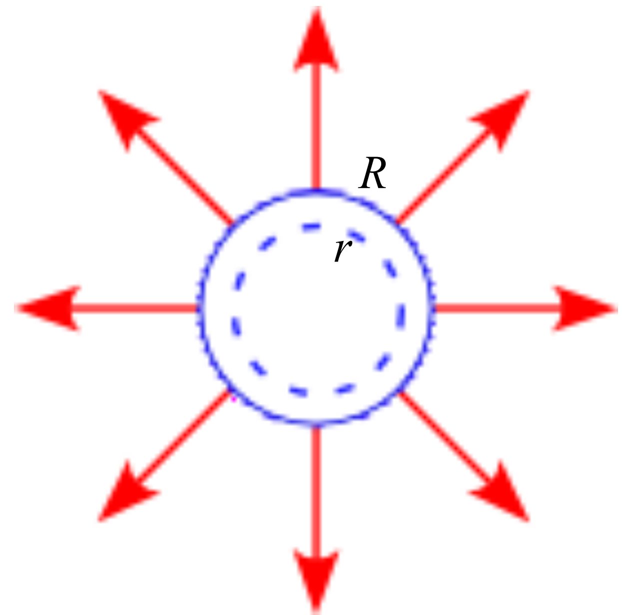
$$E(r) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{R^2}{r^2}$$

$r \le R$



$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$

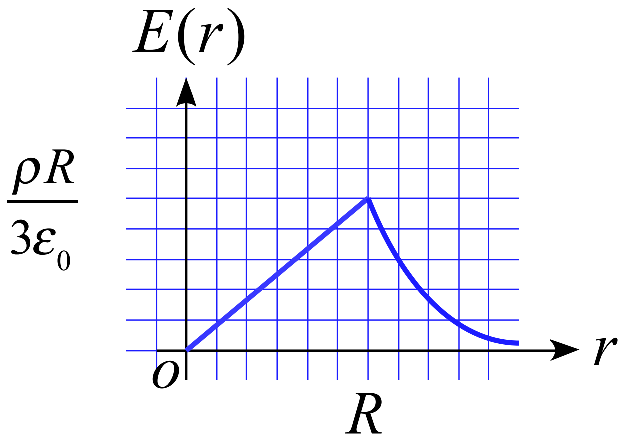


$$E(r)\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\cdot 0$$

$$E(r) = 0$$

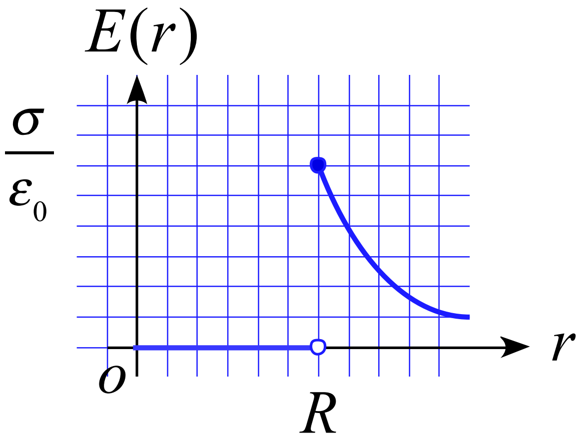
従ってグラフは

A



$E(r)$
$\frac{\rho R}{3\varepsilon_0}$
o
R
r

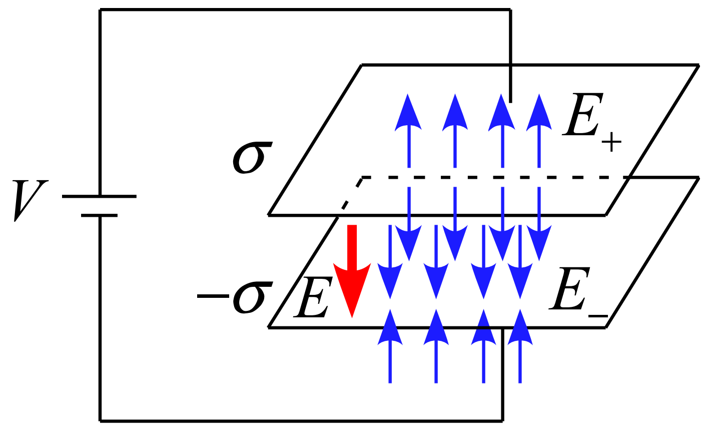
B



$E(r)$
$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}$
o
R
r

15. 期末　(一部 中テスト) コンデンサーのモデル

最もシンプルな型 → 平行板コンデンサー



E_+

E_-

の両方がが内部にある

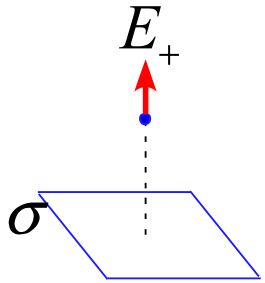
$$E = E_+ + E_-$$

(重ね合わせの原理)

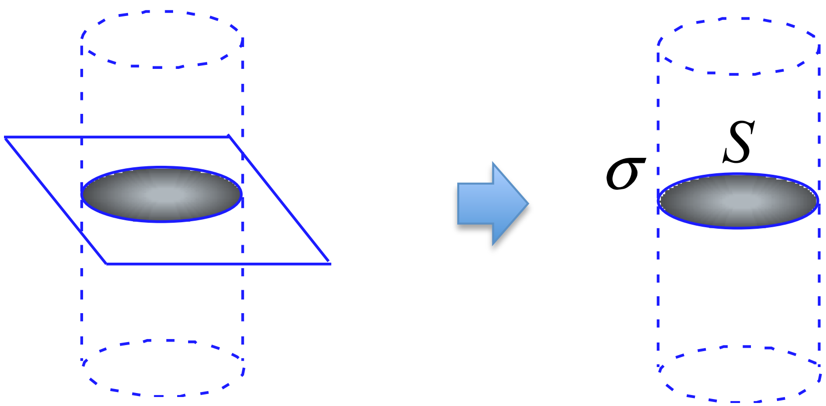
であるから、片方ずつ求めれば合計すれば良い

この電場をガウスの法則を使って求める

まずは＋ 側

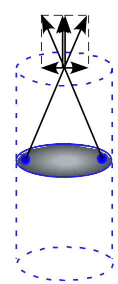


ガウスの法則では閉曲面の取り方が大事

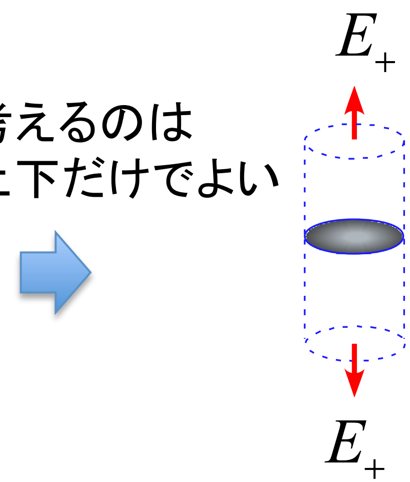


この空間内にある電気量は

$$Q = S\sigma$$



考えるのは
上下だけでよい



微小部分のクーロンの法則を考えると、
対称性により側面から電気力線は出ない

円筒の上下の部分からは

$$E_+ \times S + E_+ \times S = 2E_+S \quad [\text{本}]$$

ガウスの法則は

$$2E_{+}S = \frac{1}{\varepsilon_0} S\sigma$$

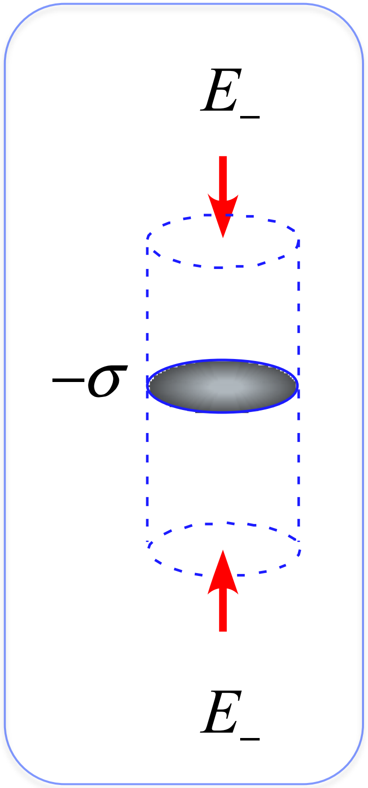
$$E_{+} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

同様にして

$$2E_{-}S = \frac{1}{\varepsilon_0} S(-\sigma)$$

$$E_{-} = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

この − は電気力線が中心に
向かっていることを示している



平行板コンデンサーの内部の電場は

$$E = |E_{+}| + |E_{-}|$$

$$= \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$